سلسلة الرياضيات العالية
مسائل وتمارين
٢

الهندسة التحليلية

الدكتور عادل سودان
الدكتور موفق دعبول

الناشر
مؤسسة الرسالة

مكتبة دار الفتح
دمشق ص.ب ٤٧٥

مكتبة الرازي
دمشق - حلبوني

الطبعة الرابعة
١٤٠٢ هـ - ١٩٨٢ م



مؤسسة الرسالة - بيروت - شارع سورية - بناية صمدي وصالحة
هاتف ٢٩٥٥٠١-٢٤١٦٩٢ ص ب ١١٧٤٦٠ برقياً: بيوشران

الفصل الأول

الاحداثيات والاشعة

١ ـ تعيين نقطة على محور : إذا اخترنا على مستقيم مفروض نقطة ما o فعندئذ ينقسم هذا المستقيم إلى نصفين غير متمايزين ، ولكننا بوضع اشارة على أحدهما نستطيع أن نميز هذا النصف الذي ندعوه بالموجب عن الآخر الذي ندعوه بالسالب . وبواسطة هذه العملية يتحول المستقيم إلى محور موجه . وأما وضع نقطة ما p على هذا المحور فانه يتحدد بعدد جبري x قيمته المطلقة تمثل بعد النقطة p عن o وأما اشارته فهي موجبة أو سالبة حسبما تقع النقطة على الجزء الموجب من المحور أو على الجزء السالب منه . نسمي عادة هذا العدد الجبري فصل النقطة p ونكتب $op = x$.

٢ ـ تعيين نقطة في مستو : يتعين وضع نقطة في مستو باشكال متعددة نذكر منها :

أ ـ الطريقة الديكارتية : نأخذ في المستوي محورين متقاطعين ox ، oy (قائمين أو مائلين) ندعوهما بالمحورين الاحداثيين . ولتعيين وضع نقطة ما p من المستوي نرسم منها مستقيمين موازيين للمحورين . ليكن p_1 و p_2 نقطتي تقاطع هذين المستقيمين مع المحورين ، ولتكن x فصل النقطة p_1 على ox و y فصل النقطة p_2 على oy . نسمي عادة العددين الجبريين x و y احداثيي النقطة p الديكارتيين .

ب ـ الطريقة القطبية : نأخذ في المستوي محوراً ox ندعوه بالمحور القطبي

ولنختر نقطة ما o عليه ندعوها بالقطب . ان وضع أي محور آخر في المستوي مثل oy يتعين بالزاوية التي يصنعها مع ox . أي بالزاوية التي يجب أن يدورها ox لينطبق على oy . ولما كان هنالك جهتان للدوران فاننا نعتبر احداهما ، وهي المخالفة لجهة دوران عقارب الساعة ، جهة الدوران الموجبة .

واذا كانت p نقطة ما من المستوي و ou محوراً ماراً بـ p ، فان وضع هذه النقطة يتعين بالزاوية Θ التي يصنعها المحور ou مع المحور ox وبفصل النقطة p على المحور ou ولنرمز له بـ r . نسمي Θ الزاوية القطبية لـ p كما يسمى العددان الجبريان r و Θ الاحداثيين القطبيين للنقطة p .

ان كل مجموعة قطبية (r , Θ) تعين نقطة وحيدة في المستوي ، في حين يقابل كل نقطة مفروضة من المستوي مجموعتان من الاحداثيات القطبية .

$$(r , \Theta + 2 k \pi) \qquad ; \qquad (- r , \Theta + \pi + 2 k \pi)$$

(k عدد صحيح) .

٣ ــ تعيين نقطة في الفراغ : يتعين وضع النقطة في الفراغ بطرق عدة نذكر منها :

أ ــ الطريقة الديكارتية : لنأخذ ثلاثة محاور غير واقعة في مستو واحد ox و oy و oz . إن كل محورين منها يعينان مستوياً نـدعوه بالمستوي الاحداثي . نرسم من النقطة p في الفراغ ثلاثة مستويات موازية للمستويات الاحداثية فتقطع المحاور في ثلاث نقط . ان هذه النقط الثلاث تتعين بفواصلها على محاورها. ولتكن هذه الفواصل x و y و z . ان وضع النقطة p يتعين تماماً بهذه الاعداد الثلاثة التي تسمى احداثيات النقطة p الديكارتية .

نفهم من الرمز $p (x , y , z)$ النقطة التي احداثياتها x و y و z .

تسمى المحاور الثلاثة ox و oy و oz ثلاثية . ونقول عن هذه الثلاثية إنها مباشرة (أو طردية) إذا رأى راصد مضجع على المحور oz ومتجه مثله ، المحور ox عن يمينه والمحور oy عن يساره ، وإلا قلنا عن الثلاثية إنها غير

مباشرة (أو عكسية) . ونقول عن الثلاثية إنها قائمة إذا كانت محاورها متعامدة مثنى مثنى .

ب – الطريقة الاسطوانية : نأخذ ثلاثية قائمة $oxyz$ (ثلاثة محاور ox, oy, oz متعامدة في o) إن وضع النقطة p في الفراغ يتم بان نرسم من النقطة p مستقيماً موازياً لـ oz فيقطع المستوي xoy بالنقطة m ، ومستوياً عمودياً عليه فيقطعه في النقطة m_1 . ان وضع النقطة p يتعين تماماً إذا عرفنا m و m_1 . لنعين النقطة m في المستوي xoy باحداثييها القطبين (r , Θ) والنقطة m_1 بفصلها على oz ولبكن z تسمى الاعداد الثلاثة (r , Θ , z) الاحداثيات الاسطوانية للنقطة p .

حـ – الطريقة القطبية الفراغية : لتعيين وضع نقطة مفروضة p من الفراغ بهذه الطريقة نأخذ ثلاثية قائمة $oxyz$ ومحورا ot ماراً من p . إن الاعداد .

$$\overrightarrow{op} = \varrho ، \quad \Theta = (\overrightarrow{oz} , \overrightarrow{ot}) ؛ \varphi = (\overrightarrow{ox} , \overrightarrow{ou})$$

بفرض $\overrightarrow{ou}$ هو مسقط المحور ot على المستوي oxy ؛ كافية لتعيين وضع p . نسمى هذه الاعداد الاحداثيات القطبية الفراغية .

٤ – القياس الجبري $\overline{AB}$ لقطعة مستقيمة على محور تساوي حاصل طرح فصل مبدئها A من فصل نهايتها B . وإذا كانت النقط $A , B , C , \ldots , L$ مبعثرة على محور فمندئذ تصح علاقة شال الآتية :

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ \ldots \ + \overline{LA} = O$$

٥ – توجد بين الاحداثيات الديكارتية القائمة في مستو والاحداثيات القطبية العلاقات الآتية :

$$x = r \cos \Theta \qquad y = r \sin \Theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \operatorname{tg} \Theta = \frac{y}{x}$$

٦ – يعطى البعد d بين النقطة $p_1 \ (x_1 , y_1)$ والنقطة $p_2 \ (x_2 , y_2)$

في المستوي المنسوب الى المحورين المتعامدين ox و oy بالدستور الآتي :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

٧ – إن احداثيات النقطة التي تقسم القطعة PQ بالنسبة m هي :

$$x = \frac{x_1 - m\,x_2}{1 - m} \qquad y = \frac{y_1 - m\,y_2}{1 - m}$$

حيث $P = p(x_1 , y_1)$ و $Q = Q(x_2 , y_2)$.

فاذا كانت $m = -1$ فاننا نحصل على احداثيي منتصف القطعة .

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

إذا حققت أربع نقط ABCD كائنة على محور موجه العلاقة التالية :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = - \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

قلنا إنها تشكل تقسيماً توافقياً .

٨ – نسمي ظل أصغر زاوية موجبة يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ميل المستقيم . فاذا كانت النقطتان $M_1(x_1 , y_1)$ و $M_2(x_2 , y_2)$ واقعتين على المستقيم فعندئذ يعطى ميل المستقيم m بالعلاقة التالية :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

٩ – العلاقات التي تربط الاحداثيات الديكارتية القائمة بالاحداثيات الاسطوانية هي :

$$x = r\cos\Theta \qquad y = r\sin\Theta \qquad z = z$$

و :

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \operatorname{tg}\Theta = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

١٠ – العلاقات التي تربط الاحداثيات الديكارتية القائمة بالاحداثيات القطبية الفراغية هي :

$$x = \varrho\sin\Theta\cos\varphi \qquad y = \varrho\sin\Theta\sin\varphi \qquad z = \varrho\cos\Theta$$

و :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \qquad ; \qquad \varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\cos \Theta = \frac{z}{\varrho} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

١١ – يعطى البعد d بين نقطتين في الفراغ معرفتين بالاحداثيات الديكارتية القائمة (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) بالدستور الآتي :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

١٢ – ان احداثيات النقطة التي تقسم القطعة PQ بالنسبة m هي :

$$x = \frac{x_1 - mx_2}{1 - m} \; ; \; y = \frac{y_1 - m\, y_2}{1 - m} \; ; \; z = \frac{z_1 - m\, z_2}{1 - m}$$

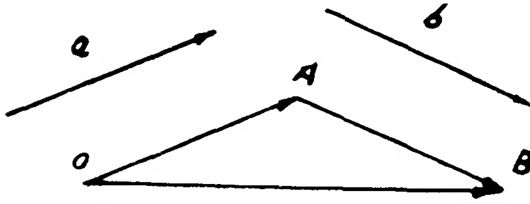
حيث : $P = P(x_1, y_1, z_1)$ و $Q = Q(x_2, y_2, z_2)$.

١٣ – الشعاع هو قطعة مستقيمة موجهة ذات مبدأ ونهاية . ويتميز بأربعة عناصر هي المبدأ والمنحني والجهة والطول (أو الشدة أو القيمة المطلقة) . يرمز لطول الشعاع $\vec{v}$ بالرمز $|\vec{v}|$. القياس الجبري لشعاع محمول على محور هو طول هذا الشعاع مسبوق باشارة + أو – حسبما تكون جهة الشعاع مثل جهة المحور أو معاكسة لها ، ويرمز القياس الجبري للشعاع $\vec{v}$ بالرمز $\bar{v}$ أو اختصاراً v إذا لم يخش الالتباس .

شعاع واحدة المحور هو شعاع طوله واحدة الطول محمول على المحور ومتجه مثلـه .

نقول عن شعاعين إنهما متساويان إذا اتفقا في المنحي والجهة والطول ، وانهما متعاكسان إذا اتفقا في المنحى والطول واختلفا في الجهة فقط .

١٤ – مجموع الشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هو شعاع جديد $\vec{v}$ نحصل عليه بالشكل الآتي :



شكل - ١

نرسم من O شعاعاً مساوياً لـ $\vec{a}$ وليكن $\overrightarrow{OA}$ ومن نهايته نرسم شعاعاً مساوياً لـ $\vec{b}$ وليكن $\overrightarrow{AB}$ ، نصل O بـ B فيكون $\overrightarrow{OB}$ هو الشعاع $\vec{v}$ المطلوب ونكتب .

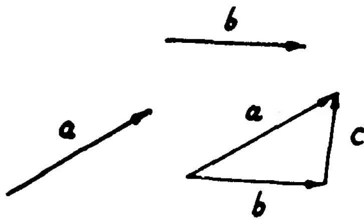
$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$$

ولجمع عدد من الأشعة ننشيء من نقطة ما o شعاعاً يساوي الشعاع الأول ومن نهايته نرسم شعاعاً آخر يساوي الشعاع الثاني وهكذا حتى الشعاع الأخير . يسمى الشعاع الذي مبدؤه في o ونهـايته نهاية الشعاع الأخـير مجموع الأشعة المفروضة .

إن عملية جمع الأشعة تخضع للخاصة التجميعية (أي يمكن عند الجمع تعويض مجموعة جزئية من الأشعة المراد جمعها بمجموعها) وللخاصة التبديلية (أي يمكن تغيير ترتيب الأشعة عند جمعها) .

١٥ - طرح شعاع $\vec{a}$ من شعاع $\vec{b}$ هو ايجاد شعاع ثالث $\vec{c}$ لو أضفنـاه لـ $\vec{b}$ لنتج $\vec{a}$ ، ونكتب :

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$



شكل - ٢

٤ – حاصل ضرب شعاع $\vec{v}$ بعدد جبري m هو شعاع جديـــد له منحى الشعاع السابق وجهته إذا كانت m موجبة والجهة المعاكسة إذا كانت m سالبة ، وأما طوله فيساوي جداء القيمة المطلقـــة لـ m بطول الشعاع $\vec{v}$.

وبالعكس إذا كان لدينا شعاعان متوازيان $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ فانه يمكن أن نجد عددا مثل m يكون من أجله :

$$\vec{v_2} = m\,\vec{v_1}$$

إن القيمة المطلقة لهذا العدد تساوي نسبة طولي الشعاعين واشارته موجبه إذا كان الشعاعان من جهة واحدة وسالبة إذا كانا من جهتين مختلفتين .

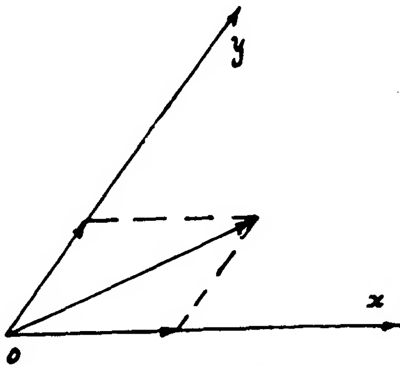
نرى بسهولة أن :

$$m\,(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = m\,\vec{a} + m\,\vec{b} + m\,\vec{c}$$

وإذا كان الشعاع $\vec{v}$ محمولاً على محور شعاع واحدته $\vec{i}$ وكان v القياس الجبري لهذا الشعاع فعندئذ يمكننا أن نكتب :

$$\vec{v} = v\,\vec{i}$$

١٦ – يمكن تفريق كل شعاع $\vec{v}$ إلى مركبتين محمولتين على محورين متقاطعين وذلك على الشكل الآتي :

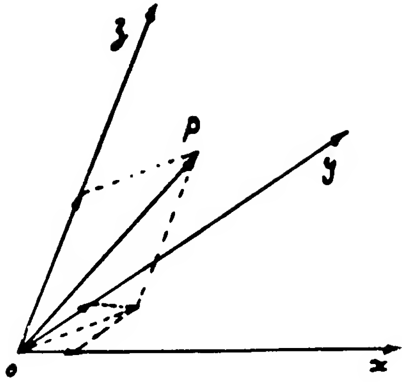


شكل – ٣

نرسم من o نقطة تقاطع المحورين شعاعاً مساوياً للشعاع المفروض . ومن نهاية هذا الشعاع نرسم مستقيمين موازيين للمحورين يقطعانها بنقطتين مثل A و B فيكون $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ مركبتي هذا الشعاع .

$$\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

بنفس الطريقة يمكن تفريق شعاع إلى ثلاث مركبات محولة على ثلاثة محاور متقاطعة .



شكل - ٤

إذا كان x و y احداثيي نقطة A في المستوى xoy وإذا كان $\vec{i}$ و $\vec{j}$ شعاعي واحـــدة المحورين ox و oy فعندئذ يكون :

$$\overrightarrow{OA} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

وفي الفراغ يكون : $\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

واذا كان $A\,(x_1 , y_1 , z_1)$ مبدأ الشعاع و $B\,(x_2 , y_2 , z_2)$ نهـايته فعندئذ تكون مركبات هذا الشعاع هي :

$$X = x_2 - x_1 \;;\; Y = y_2 - y_1 \;;\; Z = z_2 - z_1$$

١٧ – مسقط نقطة ما M على محور اسقاطاً موازيـــاً لمستو مفروض هو نقطة تقاطع مستو مار من النقطة ومواز للمستوي المفروض مع المحور .

يكون هذا الاسقاط قائماً إذا كان المستوي المفروض عمودياً على المحور .

مسقط شعاع على مستقيم هو شعاع مبدأه مسقط المبدأ ونهايته مسقط النهاية .

ومسقط شعاع على محور هو عدد جبري يقيس القطعة التي مبدأهـــا مسقط المبدأ ونهايتها مسقط النهاية .

مسقط نقطة ما M على مستو اسقاطاً موازياً لاستقامة مفروضة هو نقطة تقاطع المستقيم المنشأ من النقطة والموازي للاستقامة المفروضة .

ويكون هذا الاسقاط قائماً إذا كانت الاستقامة المفروضة عمودية على مستوي الاسقاط .

ومسقط شعاع على مستو هو شعاع مبدأه مسقط المبدأ ونهايته مسقط النهاية .

١٨ – ان مسقط مجموع اشعة على مستقيم أو مستو هو مجموع مساقط هذه الاشعة .

١٩ – الجداء العددي لشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ (ونرمز له بـ ($(\vec{a} \cdot \vec{b})$) هو العدد الجبري :

$$|a| \; |b| \cos \Theta$$

حيث Θ زاوية الشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$

للجداء العددي الخواص الآتية .

آ – $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

ب – ان الجداء العددي لشعاعين يساوي جداء طول احدهما بالقياس الجبري للمسقط العمودي للآخر عليه .

حـ – ان الجداء العددي لشعاعين متعامدين معدوم .

د – $(m_1 \vec{a} \cdot m_2 \vec{b}) = m_1 \cdot m_2 (\vec{a} \cdot \vec{b})$

هـ – $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$

و – الجداء العددي لشعاع بنفسه هو عبارة عن مربع طول هذا الشعاع .

ز – إذا كانت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ اشعة الوحدة لثلاثة المحاور المتعامدة $o\,x\,y\,z$ فانه يكون :

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \qquad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = o$$

ح – إذا كانت x_1 و y_1 و z_1 مركبات شعاع $\vec{v_1}$. و x_2 و y_2 و z_2 مركبات شعاع آخر $\vec{v_2}$ في مجموعة المحاور القائمة $o\,x\,y\,z$ فعندئذ يكون :

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

ويكون كذلك :

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_1} = v_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

٢٠ – الجداء الشعاعي (أو الخارجي أو الهندسي) للشعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$

ونرمز لـه بـ $\vec{a} \wedge \vec{b}$ أو بـ $\vec{a} \times \vec{b}$ هو شعاع ثالث $\vec{c}$ عمودي على المستوي الموازي لمنحيي الشعاعين وطوله يقدر بمساحة متوازي الاضلاع المنشأ على الشعاعين أي :

$$|a| \cdot |b| \sin \Theta$$

حيث Θ زاوية الشعاعين . وأما جهته فنختارها على شكل تكون فيه الاشعة الثلاثة $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ثلاثية طردية.

وللجداء الشعاعي الخواص الآتية :

آ – $\vec{a} \wedge \vec{b} = - \vec{b} \wedge \vec{a}$

ب – إن الجداء الخارجي لشعاعين يساوي الجداء الخارجي لاحدهما في المسقط القائم للآخر على مستو عمودي على الاول .

حـ – الجداء الخارجي لشعاعين متوازيين معدوم .

د – $m_1 \vec{a} \wedge m_2 \vec{b} = m_1 m_2 (\vec{a} \wedge \vec{b})$

هـ – $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{a} \wedge \vec{d} + \vec{b} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{d}$

و – اذا كانت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ اشعة الواحدة لثلاثة المحاور المتعامدة $o\,x\,y\,z$ فانه يكون :

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = o$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

ز – إذا كانت x_1 و y_1 و z_1 مركبات شعاع $\vec{v_1}$ و x_2 و y_2 و z_2 مركبات شعاع آخر $\vec{v_2}$ في مجموعة المحاور القائمة $o\,x\,y\,z$ فعندئذ يكون :

$$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$$

٢١ – الجداء المختلط (الجبري) لثلاثة اشعة $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ونرمز لـه بـ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$:

هو عدد جبري H نحصل عليه بضرب $\vec{a}$ بـ $\vec{b}$ شعاعياً ثم بضرب الشعاع الحاصل بـ $\vec{c}$ عددياً أي :

$$H = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

وللجداء المختلط الخواص التالية :

آ –
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) =$$
$$-(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$$

ب – ان الجداء المختلط لثلاثة إشعة يساوي بالقيمة المطلقـة حجم متوازي السطوح المنشأ على هذه الاشعة الثلاثـة واما اشارتـه فهي+ أو – حسبا تشكل $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ ثلاثية طردية أو عكسية .

حـ – الشرط اللازم والكافي كي توازي ثلاثة اشعة مستوياً واحداً هو أن يكون جداؤها المختلط معدوماً .

د –
$$(m_1\vec{a}, m_2\vec{b}, m_3\vec{c}) = m_1 m_2 m_3 (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

هـ – إذا كان $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ و $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ و $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ فعندئذ يكون :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

٢٢ – جملة الأشعة المستقلة خطياً : آ – نقول عن الشعاعين $\overrightarrow{u_2}$ ، $\overrightarrow{u_1}$ إنهما مستقلان خطياً فيما إذا لم تتحقق العلاقة :

$$\alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \overrightarrow{u_2} = 0 \qquad \alpha_1 \in R , \quad \alpha_2 \in R$$

إلا من أجل $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ وهذا يعني أن لايكون لهذين الشعاعين منحى واحد أي أن لايكونا شعاعين متوازيين (نرمز بـ R لحقل الأعـداد الحقيقية ونفهم من الرمز $\alpha \in R$ أن α عنصر من R أي أن α عدد حقيقي) .

ب – نقول عن الاشعة الثلاثة $\overrightarrow{u_3}$ ، $\overrightarrow{u_2}$ ، $\overrightarrow{u_1}$ إنها مستقلة خطياً فيما إذا لم تتحقق العلاقة :

$$\alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \overrightarrow{u_2} + \alpha_3 \overrightarrow{u_3} = 0 \qquad \alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 \in R$$

إلا من أجل $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ وهذا يعني أن الأشعة الثلاثة غير واقعة في مستو واحد .

حـ – ونقول بصورة عامة أن جملة الأشعة $\overrightarrow{u_n}$ ، ... ، $\overrightarrow{u_2}$ ، $\overrightarrow{u_1}$ مستقلة خطياً فيما إذا لم تتحقق العلاقة .

$$(1) \qquad \alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \overrightarrow{u_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{u_n} = 0$$

إلا من أجل $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

أما إذا تحققت العلاقة (1) من أجل قيم α_i غير معدومة برمتها ، فلنا إن هذه الأشعة مرتبطة خطيا .

مسائل وتمارين محلولة

١ – النقط M و A و B و C تقع على محور مفروض . برهن صحة العلاقتين :

$$(1) \quad \overline{MA} \cdot \overline{BC} + \overline{MB} \cdot \overline{CA} + \overline{MC} \cdot \overline{AB} = 0$$

$$(2) \quad \overline{MA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{MB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{MC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0$$

برهن أن العلاقة الثانية تبقى صحيحة إذا كانت M خارج المحور على أن نفهم عندئذ من $\overline{MA}$ و $\overline{MB}$ و $\overline{MC}$ أطوال القطع المستقيمة التي تصل النقطة M بالنقط A و B و C من المحور .

الحل :

نختار النقطة M مبدأ للاحداثيات على المحور المفروض ونكتب وفق علاقة شال :

$$\overline{BC} + \overline{CM} + \overline{MB} = 0$$

ومنه :

$$\overline{BC} = - \overline{MB} - \overline{CM}$$

أي :

$$\overline{BC} = \overline{MC} - \overline{MB}$$

فالقياس الجبري لقطعة مستقيمة على محور موجه يساوي فاصلة (فصل) منتهى القطعة مطروحاً منه فاصلة مبدئها . فاذا استفدنا من هذه القاعدة نستطيع أن نكتب العلاقة الأولى بالشكل :

$$\overline{MA}.(\overline{MC}-\overline{MB})+\overline{MB}.(\overline{MA}-\overline{MC})+\overline{MC}.(\overline{MB}-\overline{MA})=0$$

وبفك الأقواس والاختصار نتحقق بسهولة من صحة العلاقة .

وأما العلاقة الثانية فتأخذ الشكل :

$$\overline{MA}^2.(\overline{MC}-\overline{MB})+\overline{MB}^2.(\overline{MA}-\overline{MC})+\overline{MC}^2.(\overline{MB}-\overline{MA})$$
$$+(\overline{MC}-\overline{MB}).(\overline{MA}-\overline{MC}).(\overline{MB}-\overline{MA})=0$$

وبفك الأقواس والاختصار نتحقق من صحة هذه العلاقة .

أما إذا وقعت النقطة M خارج المحور فعندئذ نفرض أن m هو مسقط النقطـــة M على المحور ، فيكون وفق نظرية فيثاغورث في المثلث القائم :

$$\overline{MA}^2=\overline{Mm}^2+\overline{mA}^2$$
$$\overline{MB}^2=\overline{Mm}^2+\overline{mB}^2$$
$$\overline{MC}^2=\overline{Mm}^2+\overline{mC}^2$$

بالتعويض في (2) نجد بعد ترتيب الحدود :

$$\overline{Mm}^2.(\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB})+[\overline{mA}^2.\overline{BC}+\overline{mB}^2.\overline{CA}+\overline{mC}^2.\overline{AB}$$
$$+\overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}]=0$$

إن الحد الأول معدوم لأن $\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}=0$ حسب علاقة شال:

وبما أن النقطة m واقعة على المحور فإن المقدار بين القوسين الكبيرين

معدوم استناداً إلى القسم الأول من البرهان وهو المطلوب .

٢ — A و B و C ثلاث نقط واقعة على محور ، فواصلها على الترتيب a و b و c . أوجد فصل النقطة M من هذا المحور التي تحقق العلاقة .

$$\overline{MB} \cdot \overline{MC} + \overline{MC} \cdot \overline{MA} + \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$$

الحل :

استناداً إلى علاقة شال وبفرض أن فصل النقطة M هو x ، نكتب :

$$\overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM} = b - x$$
$$\overline{MC} = \overline{OC} - \overline{OM} = c - x$$
$$\overline{MA} = \overline{OA} - \overline{OM} = a - x$$

بالتعويض في العلاقة المفروضة نجد :

$$(b - x)(c - x) + (c - x)(a - x) + (a - x)(b - x) = o$$

وبحل الأقواس نجد :

$$3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca = o$$

وبميز هذه المعادلة ، التي هي من الدرجة الثانية في x ، هو :

$$= (a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$$
$$= \tfrac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] > o$$

وهكذا نجد انه يوجد قيمتان لـ x تحققان المعادلة المذكورة هما :

$$x = \frac{1}{3}(a + b + c) \pm \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}$$

وبالتالي يوجد على المحور ox نقطتان تحققان العلاقة المفروضة .

٣ – برهن أن قطري متوازي الاضلاع ABCD متناصفان .

الحل :

نختار جملة الاحداثيات على شكل تكون فيه الاحداثيات في أبسط شكل ممكن نضع مبدأ الاحداثيات O في أحـــد الرؤوس A ونجعل محور السينات منطبقاً على الضلع AB ومحور العينات عموداً عليه .

فاذا كان C الرأس المقابل لـ A وإذا افترضنا x_2 و y_2 احداثيي D ولاحظنا أن DC يوازي محور السينات وأن مسقط الشعـاع $\overrightarrow{OC}$ على المحورين يساي مجموع مسقطي $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OD}$ فعندئذ يمكننا أن نكتب .

$$A(o, o) \; ; \; B(x_1, o) \; ; \; D(x_2, y_2) \; ; \; C(x_1 + x_2, y_2)$$

ويكون احداثيا منتصف القطر AC هما :

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad \frac{o + y_2}{2}$$

واحداثيا منتصف القطر BD :

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad \frac{o + y_2}{2}$$

ومنه نلاحظ أن منتصف القطر الأول منطبق على منتصف القطر الثاني وهو المطلوب :

ملاحظة : ليكن من الواضح ان اختيارنا الخاص بجملة الاحداثيات لايؤثر على عمومية النظرية ، وذلك لأن هذه النظرية وأمثالها من نظريات

الهندسة الابتدائية تتعلق بالاشكال الهندسية نفسها وهي مستقلة عن جملة المحاور الاحداثية التي تنسب لها الاشكال الهندسية ، ولذلك فانه من الممكن في كل نظرية أن نرسم الشكل أولاً ثم نختار المحاور بشكل ملائم .

ونريد أن نلفت النظر كذلك إلى اننا عند استعمال الطرق التحليلية في البرهان نقوم بالحل جبرياً مستخدمين احداثيات النقط ، وأما الشكل نفسه فهو لايفيدنا إلا في توضيح المسألة ، والاحداثيات وحدها هي التي تعبر عن المعطيات المفروضة في المسألة . فلو اعتبرنا في التمرين السابق احداثيي النقطة C هما x_2 و y_2 فاننا لانكون قد استفدنا من كون الشكل المفروض متوازي اضلاع . أما اعتبارنا $(x_1 + x_2 , y_2)$ هما احداثيا C هو الذي جعل من الشكل متوازي أضلاع .

٤ – إذا كانت النقطة M منتصف الضلع BC من مثلث ABC فبرهن أن :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\,\overline{AM}^2 + 2\,\overline{MC}^2$$

الحـل :

يمكن برهان هذه النظرية الشهيرة في الهندسة الابتدائية بشكل تحليلي على النحو التالي : نختار محور السينات منطبقاً على الضلع BC ومحور العينات عمودياً على هذا الضلع في النقطة M ونفرض أن فصل النقطة C هو a فعندئذ يكون فصل النقطة B هو $-a$ أي أن :

$$C(a , o) \quad ; \quad B(-a , o)$$

فإذا كان (x , y) احداثيي A فعندئذ يكون استناداً إلى دستور البعد بين نقطتين :

$$\overline{AB}^2 = (x + a)^2 + y^2$$

$$\overline{AC}^2 = (x - a)^2 + y^2$$

وبجمع هاتين العلاقتين نجد :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2x^2 + 2a^2 + 2y^2 \qquad (1)$$

ولكن :

$$\overline{AM}^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad \overline{MC}^2 = a^2$$

اذن :

$$\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 = x^2 + y^2 + a^2 \qquad (2)$$

وبمقارنة (1) مع (2) نجد المطلوب .

٥ – لدينا النقطتان (3 ، 7) A و (11 ، – 1) B فاذا اعتبرناهما رأسين متقابلين في مستطيل . فما هي احداثيات مركز المستطيل .

الحـل :

من المعلوم أن مركز المستطيل يقع في منتصف كل من قطريه وحيث أن AB هو قطر في المستطيل لأنه يصل بين رأسين متقابلين ، إذن تكون إحداثيات مركز المستطيل حسب (٧) هي :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + 11}{2} = 7$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{7 - 1}{2} = 3$$

٦ – برهن أن الرباعي الذي تقع رؤوسه في النقط (1 ، 3) A ، (3 ، 6) B ، (0 ، 5) C ، (– 2 ، 2) D هو متوازي الأضلاع .

الحـل :

لنحسب أطوال اضلاع هذا الرباعي حسب دستور البعد بين نقطتين:

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(0-3)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$CD = \sqrt{(-2-0)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$DA = \sqrt{(1+2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

وهذا يدلنا على أن $AB = CD$ و $BC = DA$ وهذا يكفي أن يتحقق في رباعي حتى يكون متوازي اضلاع .

هذا ويمكن حل التمرين بشكل آخر :

لنحسب ميل أضلاع الرباعي :

ان ميل AB هو :

$$\frac{6-3}{3-1} = \frac{3}{2}$$

وميل DC هو :

$$\frac{5-2}{0-(-2)} = \frac{3}{2}$$

وميل CB هو :

$$\frac{6-5}{3-0} = \frac{1}{3}$$

وميل DA هو :

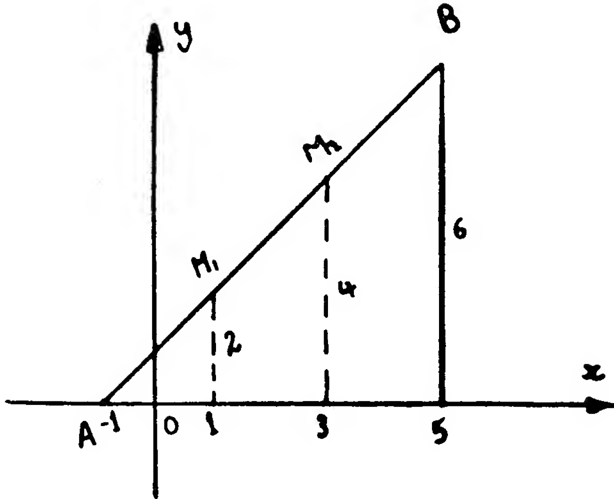
$$\frac{3-2}{1-(-2)} = \frac{1}{3}$$

وهذا يعني أن كل ضلعين متقابلين متوازيان فالرباعي اذن هو متوازي اضلاع .

٧ – قطعة مستقيمة AB قسمت بواسطة النقطتين $M_1 (1, 2)$

و (4 ، 3) M_2 إلى ثلاث قطع متساوية . احسب احداثيات النقطتين A و B .

الحـل :



شكل ـ ٥

بما أن النقطة B تقع خارج القطعة $M_1 M_2$ وبما أن بعد النقطة B عن M_1 يساوي ضعفي بعدها عن M_2 إذن يمكن اعتبار النقطة B قاسمة للقطعة $M_1 M_2$ بالنسبة 2 . وعلى هذا تكون احداثيات النقطة B استناداً إلى (٧) :

$$x_B = \frac{x - m\,x_2}{1 - m} = \frac{1 - 2 \,.\, 3}{1 - 2} = 5$$

$$y_B = \frac{y_1 - m\,y_2}{1 - m} = \frac{2 - 2 \quad 4}{1 - 2} = 6$$

اذن : $B = B\,(\,5\,,\,6\,)$

وبنفس المحاكمة نرى أن النقطة A تقسم القطعة $M_1 M_2$ بالنسبة $\frac{1}{2}$ ومنه :

$$x_A = \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot 3}{1 - \frac{1}{2}} = -1$$

$$y_A = \frac{2 - \frac{1}{2} \cdot 4}{1 - \frac{1}{2}} = 0$$

وبالتالي : $A = A(-1, 0)$

٨ – احداثيات منتصفات اضلاع مثلث هي :

$M_1(-2, 1)$ $M_2(2, 3)$ $M_3(4, -1)$

احسب احداثيات رؤوس هذا المثلث :

الحـل :

لنفرض أن رؤوس هذا المثلث هي A ، B ، C ولنفرض أن M_1 هي منتصف AB و M_2 منتصف BC و M_3 منتصف AC فعندئذ يكون لدينا :

$$\frac{x_A + x_B}{2} = -2 \qquad \frac{y_A + y_B}{2} = 1$$

ومنه :

$$x_A + x_B = -4 \qquad y_A + y_B = 2$$

وبنفس الطريقة نجد :

$$x_B + x_C = 4 \qquad y_B + y_c = 6$$

$$x_A + x_C = 8 \qquad y_A + y_c = -2$$

وبحل هذه المعادلات الست نجد :

$A(0, -3)$ $B(-4, 5)$ $C(8, 1)$

٩ – أوجد مركز الدائرة المارة بالنقط $(0, 0)$ $(4, 2)$, $(6, 4)$

الحـــل :

نفرض أن احداثيي مركز الدائرة هما a, b . ولما كان مركز الدائرة يبعد بعداً ثابتاً عن النقط الواقعة على محيط الدائرة فانه يمكننا أن نكتب :

$$(a - 0)^2 + (b - 0)^2 = (a - 4)^4 + (b - 2)^2 = (a - 6)^2 + (b - 4)^2$$

ومن هاتين المعادلتين نجد :

$$o = - 8a - 4b + 20 = - 12a - 8b + 52$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد :

$$a = -3 \qquad b = 11$$

١٠ – ماهو المنحني المستوي الذي معادلته في الاحداثيات القطبية هي :

$$r = a \cos \Theta$$

الحـــل :

نضرب طرفي المعادلة بـ r ، بفرض أن $o \neq r$ ، فنجد :

$$r^2 = a\, r \cos\Theta$$

ولكن كما نعلم من (5) :

$$r \cos \Theta = x$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

إذن تصبح المعادلة :

$$x^2 + y^2 = a\, x$$

وهذه المعادلة تمثل دائرة مارة بنقطة الاصل . ونقطة الأصل من المنحني المفروض لأنها توافق $\Theta = \frac{\pi}{2}$ ، $r = o$.

١١ – ما هي المعادلة الديكارتية للمنحني المستوي الذي معادلتـــه بالاحداثيات القطبية هي :

$$r = \frac{3}{\mp 2 + 3\sin\varphi}$$

الحــل :

يمكن أن نكتب معادلة المنحني على الشكل :

$$\mp 2\, r + 3\, r \sin\varphi = 3$$

ولكن $\quad r \sin\varphi = y \quad$ ، $\quad r^2 = x^2 + y^2$

اذن :

$$\mp 2\, r = 3 - 3\, y$$

وبتربيـع الطرفين :

$$4\, r^2 = (3 - 3\, y)^2$$

أو $\quad 4\,(x^2 + y^2) = 9 + 9\, y^2 - 18\, y$

ومنه نجد المعادلة المطلوبة :

$$4\, x^2 - 5\, y^2 + 18\, y - 9 = 0$$

١٢ – ماهي المعادلة القطبية لكل من المنحنين المستويين التاليين :

أ - $\quad (x^2 + y^2)^2 = 2\, a^2\, x\, y$

ب - $\quad y^2 = \dfrac{x^3}{2\, a - x}$

الحــل :

أ – نبدل في معادلة المنحني x و y بما يساويها بدلالة r و φ أي :

$$x = r\cos\varphi \qquad y\; r\sin\varphi$$

فنجد :

$$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 = 2\, a^2\, r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi$$

ومنه :

$$r^4 = a^2 r^2 \sin^2 \varphi$$

وهنا نجد أما $r^2 = o$ وهذه المعادلة تمثل نقطة الاصل

أو $r^2 = a^2 \sin^2 \varphi$ وهذه هي المعادلة المطلوبة وهي تمثـــل منحن يمر بنقطة الأصل التي هي كذلك احدى نقط هذا المنحني :

ب – بنفس الطريقة نجد :

$$r^2 \sin^2 \varphi = \frac{(r \cos\varphi)^3}{2a - r\cos\varphi}$$

ومنه :

$$r^2 \sin^2 \varphi (2a - r \cos \varphi) - r^3 \cos^3 \varphi = o$$

$$r^2 (2a \sin^2 \varphi - r \cos \varphi) = o$$

وهنا نجد إما $r^2 = o$ أو :

$$2a \sin^2 \varphi = r \cos \varphi$$

والعلاقة الاخيرة تعطينا :

$$r = 2a \sin \varphi \cdot tg\, \varphi$$

وهذه هي المعادلة المطلوبة وهي تمثل منحن يمر بنقطة الاصل .

١٣ – احسب البعد بين النقطتين $P(r_1 , \varphi_1)$ ، $Q(r_2 , \varphi_2)$ بالاحداثيات القطبية في المستوي .

الحــل :

من المعلوم أن بعد نقطتين في الاحداثيات الديكارتية ، إذا افترضنا $P(x_1 , y_1)$ و $Q(x_2 , y_2)$ ، هو :

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وحيث أن :

$$x_1 = r_1 \cos \varphi_1 \qquad y_1 = r_1 \sin \varphi_1$$
$$x_2 = r_2 \cos \varphi_2 \qquad y_2 = r_2 \sin \varphi_2$$

إذن :

$$PQ = \sqrt{(r_2 \cos \varphi_2 - r_1 \cos \varphi_1)^2 + (r_2 \sin \varphi_2 - r_1 \sin \varphi_1)^2}$$
$$= \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2 r_1 r_2 (\cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1)}$$
$$= \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2 r_1 r_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1)}$$

١٤ – احسب البعد بين نقطتين احداثياتها القطبية هي :

$$M_1 (3 , 10^\circ) \qquad M_2 (5 , 130^\circ)$$

الحل :

نبدل في العلاقة التي حصلنا عليها في التمرين السابق فنجد :

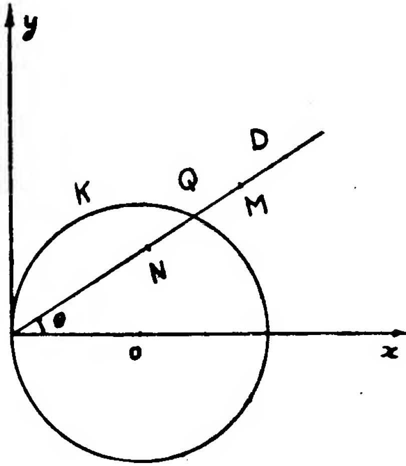
$$M_1 M_2 = \sqrt{25 + 9 - 2 . 5 . 3 \cos (130 - 10)}$$
$$= \sqrt{25 + 9 - 30 \cos 120^\circ}$$
$$= \sqrt{49} = 7$$

١٥ – لتكن لدينا دائرة r نصف قطرها b ولتكن نقطة P واقعة على محيط الدائرة . لنمرر من P مستقيماً متحولاً D . يقطع هذا المستقيم الدائرة في نقطة متحولة Q . لنحمل على D ابتداءً من Q وإلى الجهتين المختلفتين طولاً ثابتاً قدره a . فنحصل على النقطتين M و N ماهو المحل الهندسي لـ M و N .

١ – اكتب معادلة هذا المحل الهندسي بالنسبة لمجموعة محاور قطبية ، قطبها p ومحورها القطبي يمر بمركز الدائرة .

٢ – اكتب معادلة هذا المحل الهندسي بالنسبة لمجموعة محاور احداثية ديكارتية مبدؤها يقع في p والمحور ox يمر بمركز الدائرة .

الحل :



شكل - ٦

١ – من المثلث PQR نجد :

$$PQ = 2\,b \cos \Theta$$

إذن :

$$PN = 2\,b \cos \Theta - a$$

$$PM = 2\,b \cos \Theta + a$$

فالمعادلة القطبية للمنحني الذي ترسمه النقطة N هي :

$$r = 2\,b \cos \Theta - a$$

والمنحني الذي ترسمه النقطة M هي :

$$r = 2\,b \cos \Theta + a$$

هذا ويمكن جمع المعادلتين السابقتين بالمعادلة :

$$(r - 2\,b \cos \Theta)^2 = a^2$$

٢ – من اجل ايجاد المعادلة الديكارتية نلاحظ ان :

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad \cos^2 \Theta = \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2}{y^2 + x^2}$$

وبالتبديل في المعادلة القطبية نجد :

$$x^2 + y^2 - 4\,b\,x + 4\,b^2 \frac{x^2}{x^2 + y^2} = a^2$$

أو :

$$a^2 (x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 - 2 b x)^2$$

١٦ — احسب الاحداثيات الاسطوانية والكروية للنقطة M المعطاة باحداثياتها الديكارتية :

$$x = 5 \qquad y = 5 \sqrt{3} \qquad z = 10 \sqrt{3}$$

الحـل :

١ — الاسطوانية : إذا كانت (r , φ , z) احداثيات النقطة الاسطوانية فعندئذ يكون لدينا :

$$r^2 = x^2 + y^2 = 25 + 75 = 100$$

$$tg\ \varphi = \frac{y}{x} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}$$

ومنه :

$$r = 10 , \ \varphi = \frac{\pi}{3} , \ z = 10 \sqrt{3}$$

٢ — الكروية : اذا كانت $(\varrho , \Theta , \varphi)$ احداثيات النقطة الكروية فعندئذ يكون لدينا :

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 25 + 75 + 300 = 400$$

$$\cos \vartheta = \frac{z}{\varrho} = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ \varphi = \frac{y}{x} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}$$

ومنه :

$$\varrho = 20 \quad ; \quad \Theta = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

١٧ — اكتب المعادلة الديكارتية للسطح الممثل بالمعادلة الآتية المعطاة بالاحداثيات الاسطوانية :

$$\mp z = r$$

الحـل :

بتربيـع طرفي المعادلة المفروضة نجد :

$$z^2 = r^2$$

ولكننا نعلم أن $r^2 = x^2 + y^2$

فالمعادلة المطلوبة اذن :

$$z^2 = x^2 + y^2$$

١٨ – اكتب المعادلة الديكارتية للسطح المعطى بالمعادلة الآتية في الاحداثيات الكروية (r , Θ , φ) :

$$r = \mp 2 \cos \Theta \cos \varphi$$

الحـل :

بتربيـع طرفي المعادلة نجد :

$$r^2 = 4 \cos^2 \Theta \cos^2 \varphi \qquad (1)$$

ولكن :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \; ; \quad \cos \Theta = \frac{z}{r} \quad ; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

ومنه نجد :

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2}$$

بالتعويض في المعادلة (2) نحصل على المعادلة :

$$(x^2 + y^2 + z^2) = 4 \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

أو :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 (x^2 + y^2) - 4 x^2 z^2 = o$$

وهي المعادلة المطلوبة :

١٩ – لدينا المثلث ABC حيث (*):

$A(-3, -4, 1)$ $B(1, -2, 2)$ $C(-2, 2, -4)$

والنقطة $P(4, 3, 2)$. عين احداثيـات رؤوس المثلث المناظر لهذا المثلث بالنسبة للنقطة P .

الحـل :

من الواضح أن النقطـة P تقع في منتصف القطعة AA' (A' نظير A بالنسبة لـ P) ولذلك فإن :

$$\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PA'}$$

بالاسقاط على محور السينات مثلاً نجد :

$$x_A - x_P = -(x_{A'} - x_P)$$

ومنه :

$$x_{A'} = 2x_P - x_A = 8 + 3 = 11$$

بطريقة مماثلة نجد :

$$y_{A'} = 2y_P - y_A = 6 + 4 = 10$$

$$z_{A'} = 2z_P - z_A = 4 - 1 = 3$$

إذا أعدنا العمل بالنسبة لكل من للنقطتين C' و B' نجد :

$B'(7, 8, 2)$ $C'(10, 4, 8)$

وهو المطلوب :

٢٠ – إذا كان :

$$\overrightarrow{OP} = \vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$$

(*) نفرض فيا يأتي ان المحاور متعامدة إلا إذا أشرنا إلى غير ذلك .

$$\overrightarrow{OQ} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

أوجد $\overrightarrow{PQ}$ ثم احسب جيوب تمام الزوايا التي يصنعها الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ مع المحاور الاحداثية .

الحـل :

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 11\vec{k}$$

من أجل حساب جيوب تمام الزوايا التي يصنعها الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ مع المحاور الاحداثية نضرب أولاً الشعاع $\overrightarrow{pQ}$ عددياً بـ $\vec{i}$ فنجد :

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{i} = (4\vec{i} - 5\vec{j} + 11\vec{k}) \cdot \vec{i} = 4$$

ولكن من المعلوم ان :

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{i} = |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos\varphi_1 = |\overrightarrow{PQ}| \cos\varphi_1$$

حيث φ_1 الزاوية التي يصنعها $\overrightarrow{PQ}$ مع المحور ox .

وبما أن طول الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ هو :

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{16 + 25 + 121} = \sqrt{162}$$

يكون :

$$\cos\varphi_1 = \frac{4}{\sqrt{162}} = \frac{4}{9\sqrt{2}}$$

نضرب ثانياً الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ عددياً بـ $\vec{j}$ فنجد :

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{j} = (4\vec{i} - 5\vec{j} + 11\vec{k}) \cdot \vec{j} = -5$$

وإذا كانت φ_2 الزاوية التي يصنعها $\overrightarrow{PQ}$ مع المحور oy فإنه يكون :

$$\cos \varphi_3 = \frac{-5}{9\sqrt{2}}$$

وبالطريقة نفسها نجد :

$$\cos \varphi_3 = \frac{11}{9\sqrt{2}}$$

حيث φ_3 الزاوية التي يصنعها $\overrightarrow{PQ}$ مع المحور oz .

٢١ – إذا كان :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \quad , \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OC} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \qquad \overrightarrow{OD} = \vec{a} - 2\vec{b}$$

احسب $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CD}$ بدلالة الأشعة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

الحل :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{a} = \vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = \vec{b} - (\vec{a} - 2\vec{b}) = -\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{b} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \vec{a} - 2\vec{b} - (2\vec{a} + 3\vec{b}) = -\vec{a} - 5\vec{b}$$

٢٢ – أوجد شعاع الواحدة العمودي على كل من الشعاعين :

$$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \quad , \quad \vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$$

الحل :

استناداً الى العبارة التحليلية للضرب الشعاعي نكتب :

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = (1 - 4)\vec{i} + (3 + 2)\vec{j} + (8 + 3)\vec{k}$$

$$= -3\vec{i} + 5\vec{j} + 11\vec{k}$$

وطول هذا الشعاع هو :.

$$|\vec{c}| = \sqrt{9 + 25 + 121} = \sqrt{155}$$

ولكن بما ان منحى شعاع الواحدة العمودي على الشعاعين $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ هو نفس منحى $\vec{c}$ ، إذن يمكن الحصول عليه بتقسيم الشعاع $\vec{c}$ على طوله فيكون الشعاع المطلوب هو :

$$\mp \frac{1}{\sqrt{155}} (3\vec{i} + 5\vec{j} + 11\vec{k})$$

ولقد وضعنا الاشارة $\mp$ لأنه قد تكون جهة شعاع الواحـــدة من جهة شعاع $\vec{c}$ أو الجهة المعاكسة .

٢٣ – لدينا في المستوي oxy المثلث ABC حيث :

$$\vec{OA} = \vec{a} \quad , \quad \vec{OB} = \vec{b} \quad , \quad \vec{OC} = \vec{c}$$

برهن ان مساحة هذا المثلث تقاس بطول الشعاع :

$$\frac{1}{2} (\vec{b} \wedge \vec{c} + \vec{c} \wedge \vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b})$$

الحــل :

نعلم ان سطح المثلث ABC يقاس بطول الشعاع .

$$\frac{1}{2} (\vec{AB} \wedge \vec{AC})$$

ولكن هذا الشعاع يساوي :

$$\frac{1}{2} \left[(\vec{OB} - \vec{OA}) \wedge (\vec{OC} - \vec{OA}) \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left|(\vec{b} - \vec{a}) \wedge (\vec{c} - \vec{a})\right|$$

$$\frac{1}{2}\left[\vec{b} \wedge \vec{c} - \vec{b} \wedge \vec{a} - \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{a} \wedge \vec{a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{b} \wedge \vec{c} + \vec{c} \wedge \vec{a} + \vec{a} \wedge \vec{b}\right]$$

وذلك لأن $\vec{a} \wedge \vec{a} = o$. وهو المطلوب :

٢٤ – لدينا الشعاعان :

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$$

احسب سطح المثلث المنشأ على هدين الشعاعـــين ثم احسب الزاوية التي يصنعها هذان الشعاعان .

الحـــل :

نعلم ان سطح المثلث هو :

$$s = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|$$

ولكن :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \wedge (3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k})$$

$$= 28\vec{i} - 21\vec{j} - 14\vec{k}$$

وعلى هذا :

$$\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = \sqrt{(28)^2 + (21)^2 + (14)^2} = 7\sqrt{29}$$

ويكون :

$$s = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = \frac{7}{2}\sqrt{29}$$

ولحساب الزاوية التي يصنعها الشعاعان نلاحظ :

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |a| . b| \sin \Theta$$

اذن :

$$\sin \Theta = \frac{|\vec{a} \wedge \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

ولكن :

$$|\vec{a}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$$

ومنه :

$$\sin \Theta = \frac{7\sqrt{29}}{3 \,.\, 13} = \frac{7\sqrt{29}}{39}$$

يلاحظ انه يمكن الوصول الى الزاوية Θ التي يصنعها الشعاعان المفروضان باستعمال الجداء العددي .

$$(\vec{a} . \vec{b}) = (2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})\ (3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}) = 10$$

ومن جهة اخرى :

$$(\vec{a} . \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \Theta$$

اذن :

$$\cos \Theta = \frac{(\vec{a} . \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{10}{3 \,.\, 13} = \frac{10}{39}$$

٢٥ - برهن أن النقط الأربع :

$A(4, 5, 1)$ ، $B(28, -1, -5)$ ، $C(3, 9, 4)$ ، $D(-52, 4, 4)$

واقعة في مستو واحد .

الحــل :

لنحسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (28\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}) - (4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k})$$

ومنه $\overrightarrow{AB} = 24\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}$

وبالطريقه نفسها نجد :

$$\overrightarrow{AC} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AD} = -56\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

وإذا وقعت النقط الاربع في مستو واحد فإن الاشعة الثلاثــة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AD}$ تقع في المستوى نفسه . وحتى تقع الاشعة الثلاثة في مستو واحد يلزم ان ينعدم جداؤها المختلط :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 24 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 3 \\ -56 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 24 \,.\, 15 + 6(\quad 165) - 6(225) = 0$$

وهو المطلوب :

٢٦ – برهن المتطابقة الآتية :

$$(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})\vec{a} + (\vec{c}, \vec{a}, \vec{d})\vec{b} + (\vec{d}, \vec{a}, \vec{b})\vec{c}$$
$$-(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})\vec{d} = 0$$

الحــل :

لنفرض أولاً انه توجد على الأقـل ثلاثـة من الاشعـــة المفروضة

$\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ ليست موازية لمستو واحد . ولتكن $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هـــذه الاشعة .

عندئذ يمكن تفريق الشعاع $\vec{d}$ إلى ثلاث مركبـــات محمولة على الاشعة الثلاثـة $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$.

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \qquad (١)$$

لتعيين α نضرب طرفي هذه العلاقة عددياً بـ $\vec{c} \wedge \vec{b}$ فنجد :

$$(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \alpha (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) + \beta (\vec{b}, \vec{c}, \vec{b}) + \gamma (\vec{b}, \vec{c}, \vec{c})$$

ولكن :

$$(\vec{b}, \vec{c}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{c}) = 0$$

اذن :

$$\alpha = \frac{(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})}{(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})} = \frac{(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})}{(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})}$$

ولتعيين β نضرب طرفي العلاقة (1) عددياً بـ $\vec{a} \wedge \vec{c}$ فنجد :

$$(\vec{c}, \vec{a}, \vec{d}) = \beta (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

ومنه :

$$\beta = \frac{(\vec{c}, \vec{a}, \vec{d})}{(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})}$$

ولتعيين γ نضرب طرفي العلاقة (1) عددياً بـ $\vec{b} \wedge \vec{a}$ فنجد :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = \gamma (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

ومنه :

$$\gamma = \frac{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} = \frac{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})}{(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})}$$

لنبدل في (1) α و β و γ بقيمها فنجد :

$$(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})\vec{d} = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})\vec{a} + (\vec{c}, \vec{a}, \vec{d})\vec{b}$$
$$+ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})\vec{c}$$

وهي العلاقة المطلوبة :

أما إذا كانت كل ثلاثة من الاشعة المفروضة واقعة في مستو واحد فعندئذ يكون :

$$(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{d}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{d})$$
$$= (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = 0$$

وتبقى العلاقة كذلك صحيحة .

٢٧ – برهن تحليلياً الدستور الآتي المعروف بدستور جيبس .

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

الحــل :

لنفرض ان الاشعة معطاة بواسطة مركباتها على الشكل الآتي :

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

$$\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$$

حسب عبارة الجداء الخارجي التحليلية نجد :

$$\vec{b} \wedge \vec{c} = (b_2 c_3 - b_3 c_2) \vec{i} + (b_3 c_1 - b_1 c_3) \vec{j} + (b_1 c_2 - b_2 c_1) \vec{k}$$

كذلك :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = [a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3)] \vec{i}$$

$$+ [a_3 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_1 (b_1 c_2 - b_2 c_1)] \vec{j}$$

$$+ [a_1 (b_3 c_1 - b_1 c_3) - a_2 (b_2 c_3 - b_3 c_2)] \vec{k}$$

$$= [(a_2 c_2 + a_3 c_3) b_1 - (a_2 b_2 + a_3 b_3) c_1] \vec{i}$$

$$+ [(a_1 c_1 + a_3 c_3) b_2 - (a_1 b_1 + a_3 b_3) c_2] \vec{j}$$

$$+ [(a_1 c_1 + a_2 c_2) b_3 - (a_1 b_1 + a_2 b_2) c_3] \vec{k}$$

$$= [(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_1 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_1] \vec{i}$$

$$+ [(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_2 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_2] \vec{j}$$

$$+ [(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_3 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_3] \vec{j}$$

$$= (\vec{a} \cdot \vec{c}) (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})(c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k})$$

$$= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

وهو المطلوب .

٢٨ – برهن العلاقة الآتية :

$$\vec{a} \wedge [\vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d})] = (\vec{b} \cdot \vec{d}) (\vec{a} \wedge \vec{c}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \wedge \vec{d})$$

الحـل :

استناداً الى دستور جيبس نكتب :

$$\vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{b} \cdot \vec{d})\vec{c} - (\vec{b} \quad \vec{c})\vec{d}$$

وعلى هذا :

$$\vec{a} \wedge [\vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d})] = \vec{a} \wedge [(\vec{b} \cdot \vec{d})\vec{c}$$

$$- (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{d}] = (\vec{b} \cdot \vec{d})(\vec{a} \wedge \vec{c})$$

$$- (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \wedge \vec{d})$$

وهو المطلوب :

٢٩ – برهن العلاقة الآتية :

$$\cdot(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})\vec{c} - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{d}$$

الحـل :

لنرمز للشعـاع $\vec{a} \wedge \vec{b}$ بالرمز $\vec{e}$ فعندئذ يكون .

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \vec{e} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d})$$

وحسب دستور جيبس يمكن كتابة الطرف الأيمن من العلاقـــة الأخيرة على الشكل :

$$(\vec{e} \cdot \vec{d})\vec{c} - (\vec{e} \cdot \vec{c})\vec{d}$$

ولكن :

$$(\vec{e} \cdot \vec{d}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{d} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$$

$$(\vec{e} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

إذن :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})\vec{c} - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{d}$$

وهو المطلوب .

٣٠ – برهن أن :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{b} \wedge \vec{c}, \vec{c} \wedge \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$$

الحـل :

حسب تعريف الجـداء المختلط لثلاثة أشعة نضرب الشعاع الأول في الثاني شعاعياً ثم نضرب الشعاع الحاصل بالشعاع الثالث عددياً ولكن استناداً إلى التمرين السابق يكون :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{b})\, \vec{c} \qquad (1)$$

وبما أن :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}) = 0$$

لأن حجم متوازي السطوح المنشأ على ثلاثة أشعة ، اثنان منها منطبقان على بعضها يساوي الصفر فلا يبقى في الطرف الأيمن من العلاقة (1) سوى الحد الأول .

إذن :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{b} \wedge \vec{c}, \vec{c} \wedge \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\, \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a})$$

$$= (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$$

$$= (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$$

وهو المطلوب :

٣١ – برهن العلاقة :

$$(\vec{b}\wedge\vec{c})(\vec{a}\wedge\vec{d})+(\vec{c}\wedge\vec{a}).(\vec{b}\wedge\vec{d})$$
$$+(\vec{a}\wedge\vec{b})(\vec{c}\wedge\vec{d})=0$$

واستعمالها من أجل برهان :

$$\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$$

الحـل :

لنحسب قبل كل شيء الحد الأول من العلاقة المذكورة . من اجل ذلك نومز للشعاع $\vec{a}\wedge\vec{d}$ بالرمز $\vec{e}$ فعندئذ يمثل الحد المذكور الجداء المختلط

$$(\vec{b},\vec{c},\vec{e})$$

ولكن حسب خواص الجداء المختلط يمكننا اجراء تبديل دوري بين أشعته أي :

$$(\vec{b},\vec{c},\vec{e})=(\vec{c},\vec{e},\vec{b})=(\vec{c}\wedge\vec{e}).\vec{b}$$

من أجل حساب $\vec{c}\wedge\vec{e}$ نبدل الشعاع $\vec{e}$ بقيمته ونستعمل دستور جيبس فنجد :

$$\vec{c}\wedge\vec{e}=\vec{c}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{d})=(\vec{c}.\vec{d})\vec{a}-(\vec{c}.\vec{a})\vec{d}$$

ومنه :

$$\vec{b}\wedge\vec{c}).(\vec{a}\wedge\vec{d})=(\vec{c}\wedge\vec{e}).\vec{b}=(\vec{c}.\vec{d})(\vec{a}.\vec{b})$$
$$-(\vec{c}.\vec{a})(\vec{d}.\vec{b})$$

بنفس الطريقة نجد :

$$(\vec{c} \wedge \vec{a})(\vec{b} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{d} \cdot \vec{c})$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})(\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{b} \cdot \vec{d})(\vec{c} \cdot \vec{a}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{d} \cdot \vec{a})$$

ومنه يكون الطرف الايسر من العلاقة المفروضة مساوياً للمقدار :

$$(\vec{c} \cdot \vec{d})(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{c} \cdot \vec{a})(\vec{d} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$
$$- (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{d} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{d})(\vec{c} \cdot \vec{a}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{d} \cdot \vec{a})$$

ولكن هذا المقدار الاخير يساوي الصفر وبذلك يتم الجزء الاول من المطلوب . من اجل برهان العلاقة .

$$\sin(A + B)\sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$$

نفرض أن الأشعة الاربعة $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ واقعة في مستو واحد ، ونفرض كذلك ان الزاوية بين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تساوي الزاوية بين $\vec{c}$ و $\vec{d}$ أي :

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{d}) = B$$

ولنفرض كذلك :

$$(\vec{a}, \vec{c}) = A$$

فعندئذ يكون :

$$(\vec{a}, \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{d}) = A + B$$

$$(\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) - (\vec{a}, \vec{b}) = A - B$$

$$(\vec{c}, \vec{a}) = -A$$

$$(\vec{b}, \vec{d}) = (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{d}) = A - B + B = A$$

وحسب تعريف الجداء الشعاعي تكون كل الجداءات الشعاعية الواردة في العلاقة المذكورة بنص المسألة عمودية على المستوي الذي تقع الأشعة الأربعة وبذلك تؤول العلاقة المذكورة إلى الشكل :

$$|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \sin(A - B) \cdot |\vec{d}| \cdot |\vec{a}| \sin(A + B)$$
$$- |\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \sin A\, |\vec{b}| \cdot |\vec{d}| \sin A$$
$$+ |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin B\, |\vec{c}| \cdot |\vec{d}| \sin B = o$$

وبالاختصار على $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot |\vec{d}|$ نجد :

$$\sin(A - B)\sin(A + B) = \sin^2 A - \sin^2 B$$

وهو المطلوب .

٣٢ – اذا كان لدينا عـــدة نقط في الفراغ $A_1 , A_2 , \ldots , A_n$ وإذا الحقنا بهذه النقط الأعداد الجبرية $k_1 , k_2 , \ldots , k_n$ (مثال ذلـك الحالة التي تكون فيها النقط المذكورة نقطاً مادية والأعداد الملحقة بها كتل هذه النقط) فعندئذ توجد نقطة وحيدة G تسمى مركز النقط (مركز الكتل) تحقق العلاقة الشعاعية :

$$(1) \qquad (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)\overrightarrow{OG} = k_1 \overrightarrow{OA_1} + k_2 \overrightarrow{OA_2} + \ldots + k_n \overrightarrow{OA_n}$$

وذلك بفرض أن $\sum k_i = k_1 + k_2 + \ldots + k_n \neq o$ وان O نقطة ما من الفراغ . يبرهن أن النقطة G لاتتأثر إذا غيرنا موضع النقطة O .

أما اذا كان $\sum k_i = o$ فعندئذ تكون النقطة G غير معينة ويمثل الشعاع في الطرف الأيمن من العلاقة شعاعاً ثابتاً عندما تتحول النقطة O.

والمطلوب فيما يلي حل المسألة التالية :

لتكن لدينا النقط A , B , C في الفراغ المنسوب إلى جملة محاور احداثية قائمة oxyz :

$$A(a, o, o) \; ; \quad B(o, b, o) \; ; \quad C(o, o, c)$$

عين المركز I للنقط A , B , C , O إذا الحقنا بها الأعداد 1 , 1 , 1 , - 1 على الترتيب :

ثم برهن أن $\overrightarrow{OI} = \frac{3}{2}\ \overrightarrow{OG}$ بفرض أن G مركز ثقل المثلث ABC

الحل :

اعتماداً على العلاقة (1) نجد :

$$(1 + 1 + 1 - 1)\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OO}$$

أو :

$$(2) \qquad 2\,\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

وبالاسقاط نجد (بفرض أن x , y , z احداثيات النقطة I) :

$$x = \frac{a}{2} \quad ; \quad y = \frac{b}{2} \quad ; \quad z = \frac{c}{2}$$

وبما أن مركز ثقل المثلث ، كما هو معلوم من أبحاث الميكانيك ، هو مركز رؤوس هذا المثلث عندما نلحق بها كتلاً متساوية ، فاننا نجد (اذا كانت الكتلة في كل رأس تساوي k) .

$$3\,k\,\overrightarrow{OG} = k\,\overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{OB} + k\,\overrightarrow{OC}$$

أو :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OG}$$

بالتعويض في العلاقة (2) نجد المطلوب .

٣٣ – (١)لدينا ثلاث نقط C و B و A وثلاثة أعداد موجبة c و b و a مجموعها s برهن أن النقطة G حيث :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{s}\left(a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC} \right) \quad (1)$$

تحقق الخاصة التالية : مساحات المثلثات GBC, GCA, GAB تتناسب مع الأعداد c ، b ، a علماً بأن النقطة O هي نقطة ما من الفراغ .

(٢) بين ان H ، نقطة تقاطع الارتفاعات في مثلث ، تحقق العلاقة :

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{s'}\left[(\operatorname{tg} A)\,\overrightarrow{OA} + (\operatorname{tg} B)\,\overrightarrow{OB} + (\operatorname{tg} C)\,\overrightarrow{OC} \right] \quad (2)$$

حيث $s' = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$

(٣) بين أن المركز ω للدائرة المارة من رؤوس المثلث تحقق العلاقة :

$$\overrightarrow{O\omega} = \frac{1}{s''}\left[(\sin 2A)\,\overrightarrow{OA} + (\sin 2B)\,\overrightarrow{OB} + (\sin 2C)\,\overrightarrow{OC} \right] \quad (3)$$

حيث $s'' = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

(٤) بين أن المركز I للدائرة المماسة داخلاً لأضلاع المثلث تحقق العلاقة :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{2}{s'''}\left[a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC} \right] \quad (4)$$

حيث a و b و c أطوال أضلاع المثلث و $s''' = a + b + c$.

الحـل :

(١) نختار النقطة O في العلاقة (١) منطبقة على G فعندئذ نجد :

$$a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{O} \quad (5)$$

نضرب هذه العلاقة شعاعياً بالشعاع $\overrightarrow{GA}$ فنجد :

$$(a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC}) \wedge \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{O} \wedge \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{O}$$

ومنه ، حسب خواص الجداء الشعاعي ، نجد :

$$b(\overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{GA}) + c(\overrightarrow{GC} \wedge \overrightarrow{GA}) = o$$

وبما أن طول الجداء الشعاعي لشعاعين يقدر بضعف مساحة المثلث المنشأ على الشعاعين واذا رمزنا لمساحات المثلثات GAB ، GCA ، GAC بـ s_3 ، s_2 ، s_1 على الترتيب نجد :

$$b\,s_3 = c\,s_2$$

ومنه :

$$\frac{s_1}{b} = \frac{s_3}{c}$$

وإذا ضربنا بعد ذلك (5) شعاعياً بـ $\overrightarrow{GB}$ نجد بطريقة مماثلة :

$$\frac{s_3}{c} = \frac{s_1}{a}$$

ومنه :

$$\frac{s_1}{a} = \frac{s_2}{b} = \frac{s_3}{c}$$

وهو المطلوب الأول .

هذا ويمكن للقارىء أن يبرهن العكس بسهولة وهو انه اذا تناسبت مساحات المثلثات المذكورة مع الأعداد a و b و c فعندئذ تتحقق المعادلة (1) .

٢ — لبرهان الجزء الثاني من المسألة يكفي ان نبرهن أن مساحات المثلثات HAB ، HCA ، HBC تتناسب مع tg C ، tg B ، tg A على الترتيب :

يمكننا أن نبرهن بسهولة أن الزوايا AHB ، CHA ، BHC تساوي

الزوايا $A + B$ ، $C + A$ ، $B + C$ على الترتيب ولذلك فـــإن مساحات المثلثات المذكورة هي :

$$s_1 = \frac{1}{2} HB \cdot HC \sin A \; ; \; s_2 = \frac{1}{2} HC \cdot HA \sin B \; ;$$

$$s_3 = \frac{1}{2} HA \cdot HB \sin C$$

ولكن :

$$HB \cos A = HA \cos B \quad ; \quad HC \cos B = HB \cos C$$

اذن :

$$\frac{s_1}{tg\, A} = \frac{s_2}{tg\, B} = \frac{s_3}{tg\, C}$$

وهو المطلوب الثاني .

٣ – بما أن الزاوية المركزية في الدائرة تساوي ضعف الزاويـــة المحيطية التي تحد القوس نفسه فإن مساحات المثلثات ωAB , ωCA , ωBC هي (بفرض أن r نصف قطر الدائرة) :

$$\frac{1}{2} r^2 \sin 2\,A \quad , \quad \frac{1}{2} r^2 \sin\, 2\,B \quad , \quad \frac{1}{2} r^2 \sin 2\,C$$

فهي تتناسب إذن مع $\sin 2\,C$, $\sin 2\,B$ ، $\sin 2\,A$ وهو المطلوب .

٤ – نترك البرهان للقارىء لسهولته .

٣٤ – A و B و C و D اربع نقط كيفية . برهن العلاقة :

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$$

الحـل :

نلاحظ أن جميع الأشعة الواردة في الطرف الأيمن من العلاقـــة

تبدأ بـ A ، لذلك نكتب :

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \wedge (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$$

وحسب خواص الجداء الهندسي يكون :

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$$

وهي العلاقة المطلوبة .

نلاحظ أن الطرف الأيسر من العلاقة مستقل عن A ويتعلق فقط بمواضع النقط الثلاث .

٣٥ – A و B و C و D أربع نقط كيفية . برهن العلاقة :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

ماذا نستنتج من هذه العلاقة عندما ينعدم حدان منها .

الحـــل :

إن الطرف الأيسر من العلاقة المفروضة يكتب بالشكل :

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC} (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

وبفك الأقواس نلاحظ أن المقدار الأخير يساوي الصفر .

وانعدام حدين من العلاقة المفروضة يجر معه انعدام الحد الثالث ، وهذا يعني (إذا لاحظنا أن الأشعة الواردة في العلاقة محمولة على أحرف رباعي وجوه ABCD في الحالة التي لاتقع فيها النقط الأربع في مستو واحد) انه إذا تعامد الضلعان في كل من زوجين اثنين من الاضلاع

المتقابلة في رباعي وجوه فعندئذ يتعامد ضلعا الزوج الثالث .

أما إذا وقعت النقط الأربع في مستو واحد ولم تقع النقط الثلاث A و B و C على استقامة واحدة فعندئذ نستنتج من انعدام الحدين الأول والثاني ان النقطة D هي نقطة تلاقي الارتفاعين في المثلث ABC المتعلقين بالنقطتين C و B . وانعدام الحد الثالث يعني ان الارتفاع الثالث النازل من النقطة A على الضلع BC يمر من النقطة D ، فارتفاعـــات المثلث تتلاقى اذن بنقطة واحدة

٣٦ – لدينا $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ ثلاثة أشعة . احسب كلًا من الجداءين :

$$(1) \quad P = (\vec{B} + \vec{C} \, , \, \vec{C} + \vec{A} \, , \, \vec{A} + \vec{B})$$

$$(2) \quad Q = ((\vec{A} + \vec{B}) \wedge (\vec{A} + \vec{C}) \, , \, (\vec{B} + \vec{C}) \wedge (\vec{B} + \vec{A}) \, , \, (\vec{C} + \vec{A}) \wedge (\vec{C} + \vec{B}))$$

بدلالة الجداء المختلط $H = (\vec{A} \, , \, \vec{B} \, , \vec{C})$

الحـــل :

١ – يمكن ، استناداً إلى خواص الجداء المختلط كتابة الجـــداء الأول بالشكل التالي :

$$P = (\vec{B}, \vec{C}, \vec{A}) + (\vec{B}, \vec{C}, \vec{B}) + (\vec{B}, \vec{A}, \vec{A}) + (\vec{B}, \vec{A}, \vec{B})$$
$$+ (\vec{C}, \vec{C}, \vec{A}) + (\vec{C}, \vec{C}, \vec{B}) + (\vec{C}, \vec{A}, \vec{A}) + (\vec{C}, \vec{A}, \vec{B})$$

وجميع الجداءات المختلطة في العلاقة الأخيرة ، باستثناء الأول والأخير،

معدومة لتطابق شعاعين في كل منها . وإذا اجرينا تبديلاً دورياً مناسباً في أشعة الجداءين الأول والأخير نجد أن كلاً منها يساوي H ، أي :

$$P = 2H$$

٢ – لبرهان العلاقة الثانية نستفيد من تعريف الجداء المختلط فنكتب :

$$Q = [(\vec{A}+\vec{B})\wedge(\vec{A}+\vec{C})\wedge(\vec{B}+\vec{C})\wedge(\vec{B}+\vec{A})]\cdot(\vec{C}+\vec{A}\wedge\vec{C}+\vec{B})$$

ولكننا نعلم من التمرين (٢٩) أن :

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{c}\wedge\vec{d}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c} - (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}$$

لذلك :

$$(\vec{A}+\vec{B})\wedge(\vec{A}+\vec{C})\wedge(\vec{B}+\vec{C})\wedge(\vec{B}+\vec{A})$$
$$= (\vec{A}+\vec{B},\vec{A}+\vec{C},\vec{B}+\vec{A})(\vec{B}+\vec{C}) -$$
$$(\vec{A}+\vec{B},\vec{A}+\vec{C},\vec{B}+\vec{C})(\vec{B}+\vec{A})$$

والحد الأول معدوم لتطابق شعاعين في الجداء المختلط الوارد فيه في حين يمكن كتابة الحد الثاني اعتماداً على (١) بالشكل :

$$(\vec{A}+\vec{B},\vec{B}+\vec{C},\vec{C}+\vec{A})(\vec{B}+\vec{A}) = 2H(\vec{B}+\vec{A})$$

وبذلك يكون :

$$Q = 2H(\vec{B}+\vec{A})\cdot(\vec{C}+\vec{A}\wedge\vec{C}+\vec{B})$$
$$= 2H(\vec{B}+\vec{A},\vec{C}+\vec{A},\vec{C}+\vec{B}) = -4H^2$$

٣٧ – برهن العلاقة :

$$(1)\quad (\vec{a},\vec{b},\vec{c})(\vec{p}\wedge\vec{q}) = \begin{vmatrix} \vec{p}\cdot\vec{a} & \vec{q}\cdot\vec{a} & \vec{a} \\ \vec{p}\cdot\vec{b} & \vec{q}\cdot\vec{b} & \vec{b} \\ \vec{p}\cdot\vec{c} & \vec{q}\cdot\vec{c} & \vec{c} \end{vmatrix}$$

استخدم هذا الشكل لتحصل على الجداء ·

$$(2)\qquad (\vec{a},\vec{b},\vec{c})(\vec{p},\vec{q},\vec{r})$$

ثم استخلص قاعدة ضرب معينين من المرتبة الثالثة .

الحـل :

ننشر المعين وفق عناصر العمود الأول فنجد :

$$(\vec{p}\cdot\vec{a})[(\vec{q}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{q}\cdot\vec{c})\vec{b}]$$
$$+(\vec{p}\cdot\vec{b})[(\vec{q}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{q}\cdot\vec{a})\vec{c}]$$
$$+(\vec{p}\cdot\vec{c})[(\vec{q}\cdot\vec{a})\vec{b}-(\vec{q}\cdot\vec{b})\vec{a}]$$

واستناداً إلى دستور جيبس يمكن كتابة العبارة الأخيرة بالشكل :

$$(\vec{p}\cdot\vec{a})[\vec{q}\wedge(\vec{c}\wedge\vec{b})]+(\vec{p}\cdot\vec{b})[\vec{q}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{c})]$$
$$+(\vec{p}\cdot\vec{c})[\vec{q}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{a})]$$
$$=[(\vec{p}\cdot\vec{a})(\vec{b}\wedge\vec{c})+(\vec{p}\cdot\vec{b})(\vec{c}\wedge\vec{a})+(\vec{p}\cdot\vec{c})$$
$$(\vec{a}\wedge\vec{b})]\wedge\vec{q}$$
$$=\{[(\vec{p}\cdot\vec{a})\vec{b}-(\vec{p}\cdot\vec{b})\vec{a}]\wedge\vec{c}+(\vec{p}\cdot\vec{c})(\vec{a}\wedge\vec{b})\}\wedge\vec{q}$$

وبالاستفادة من دستور جيبس ثانية نجد أن :

$$(\vec{p}\cdot\vec{a})\,\vec{b}-(\vec{p}\cdot\vec{b})\,\vec{a}=\vec{p}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{a})$$

وبالتالي تصبح قيمة المعين :

$$\left\{[\vec{p}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{a})]\wedge\vec{c}+(\vec{p}\cdot\vec{c})(\vec{a}\wedge\vec{b})\right\}\wedge\vec{q}$$

وبنشر الحد الأول من المقدار ضمن القوسين الكبيرين في الطرف الأيسر وفق دستور جيبس والاختصار نجد :

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\,\vec{p}\wedge\vec{q}=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})(\vec{p}\wedge\vec{q})$$

وهو المطلوب .

للحصول على الجداء(2)يكفي ان نضرب طرفي (1) داخلياً بـ $\vec{r}$ بعد أن ننشر المعين في الطرف الثاني وفق عناصر العمود الثالث فنجد :

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})(\vec{p},\vec{q},\vec{r})=\begin{vmatrix}\vec{p}\cdot\vec{a} & \vec{q}\cdot\vec{a} & \vec{r}\cdot\vec{a}\\ \vec{p}\cdot\vec{b} & \vec{q}\cdot\vec{b} & \vec{r}\cdot\vec{b}\\ \vec{p}\cdot\vec{c} & \vec{q}\cdot\vec{c} & \vec{r}\cdot\vec{c}\end{vmatrix}$$

ومن هذه العبارة نستلخص القاعدة الشهيرة لضرب معينين من المرتبة الثالثة .

٣٨ – لتكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاثة أشعة واحدة كيفية لا توازي مستوياً واحداً ، وتصنع فيما بينها الزوايا α و β و γ (كل زاوية من هذه الزوايا أكبر من الصفر وأصغر من π) :

١ – احسب مركبات الأشعة :

$$\vec{u} = \vec{j} \wedge \vec{k} \quad ; \quad \vec{v} = \vec{k} \wedge \vec{i} \quad , \quad \vec{w} = \vec{i} \wedge \vec{j}$$

في هذه الجملة المائلة $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i})$ بدلالة α و β و γ .

٢ – احسب في الجملة المذكورة مركبات الجداء :

$$(X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) \wedge (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k})$$

٣ - برهن :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})^2$$

الحـل :

١ – استناداً إلى التمرين (٢٦) يمكننا أن نكتب :

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\vec{u} = (\vec{u}, \vec{j}, \vec{k})\vec{i} + (\vec{u}, \vec{k}, \vec{i})\vec{j} + (\vec{u}, \vec{i}, \vec{j})\vec{k})$$

ولكن :

$$(\vec{u}, \vec{j}, \vec{k}) = ((\vec{j} \wedge \vec{k}) \wedge \vec{j}) . \vec{k} = (\vec{j} . \vec{j})(\vec{k} . \vec{k})$$
$$- (\vec{j} \cdot \vec{k})(\vec{j} . \vec{k}) = 1 - \cos^2\beta$$

كذلك :

$$(\vec{u}, \vec{k}, \vec{i}) = \cos\beta \cos\gamma - \cos\alpha$$
$$(\vec{u}, \vec{i}, \vec{j}) = \cos\alpha \cos\beta - \cos\gamma$$

وهكذا نجـــد :

$$(1) \quad (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\vec{u} = (1 - \cos^2\beta)\vec{i} + (\cos\beta \cos\gamma - \cos\alpha)\vec{j}$$
$$+ (\cos\alpha \cos\beta - \cos\gamma)\vec{k}$$

وبطريقة مماثلة نجد :

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\,\vec{v} = (\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha)\vec{i} + (1 - \cos^2\gamma)\vec{j}$$

$$+ (\cos\gamma\cos\alpha - \cos\beta)\vec{k}$$

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\,\vec{w} = (\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma)\,\vec{i} + (\cos\gamma\cos\alpha$$

$$- \cos\beta)\vec{j} + (1 - \cos^2\alpha)\,\vec{k}$$

يبقى أن نعين قيمة الجداء المختلط $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لنحصل على المطلوب الأول . نضرب ، من أجل ذلك ، العلاقة (1) داخلياً بـ $\vec{i}$ فنجد :

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})^2 = (1 - \cos^2\beta - \cos^2\alpha - \cos^2\gamma) + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

٢ – إن الجداء المطلوب يساوي :

$$(YZ' - ZY')\,\vec{u} + (ZX' - XZ')\,\vec{v} + (XY' - YX')\,\vec{w}$$

٣ – نلاحظ أن :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (\vec{j} \wedge \vec{k}) \wedge (\vec{k} \wedge \vec{i})$$

واستناداً إلى التمرين (٢٩) نجد :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})\,\vec{k} - (\vec{j}, \vec{k}, \vec{k})\,\vec{i}$$
$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\,\vec{k}$$

وبالتالي :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\,\vec{k} \cdot (\vec{i} \wedge \vec{j})$$
$$= (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})^2$$

وهو المطلوب .

٣٩ – لتكن لدينا الثلاثية Oxyz والكرة التي مركزها O ونصف قطرها واحدة الطول ولنفرض أن هـذه الكرة تقطع أحرف الثلاثيـــة

في A و B و C على الترتيب .

لنرسم المستوي P العمودي في O على OA ولنفرض أن هذا المستوي يقطع المستويين OAB و OBC وفق نصفي المستقيمين OB′ و OC′ (B′ و C′ على الكرة المفروضة) . فاذا فرضنا A هي الزاوية المستوية للثنائية OA و a و b و c أوجه الثلاثية المفروضة والمطلوب :

١ – اثبات أن :

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \cos b \cdot \cos c + \sin b \sin c \cdot \overrightarrow{OB'} \cdot \overrightarrow{OC'}$$

٢ – استنتاج الدستور الأساسي للمثلثات الكروية :

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

الحل :

١ – من الواضح أن $\overrightarrow{OB}$ يقع في المستوي المعين بـ OA و OB′ وأن OA عمودي على OB′ .

وبما أن الزاوية AOB تساوي c نجد :

$$\overrightarrow{OA} = \cos c \cdot \overrightarrow{OB} + \sin c \cdot \overrightarrow{OB'}$$

بطريقة مماثلة :

$$\overrightarrow{OC} = \cos b \cdot \overrightarrow{OA} + \sin b \cdot \overrightarrow{OC'}$$

وبضرب العلاقتين الأخيرتين عددياً ، طرفاً بطرف ، نجد :

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \cos c \cdot \cos b + \sin c \cdot \sin b \cdot \overrightarrow{OB'} \cdot \overrightarrow{OC'} \qquad (1)$$

٢ – بما أن :

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \cos a$$

وأن الزاوية بين OB' و OC' تساوي الزاوية A فعندئذ يكون :

$$\overrightarrow{OB'} \cdot \overrightarrow{OC'} = \cos A$$

بالتعويض في (1) نحصل على المطلوب :

٤٠ – برهن أن الأشعة :

$$\vec{a}(1, 2, 3) \; ; \; \vec{b}(0, 1, 2) \; ; \; \vec{c}(0, 0, -1)$$

مستقلة خطياً .

الحـل :

كي تكون الأشعة المفروضة مستقلة خطياً يجب أن لاتصح العلاقة :

$$(1) \qquad \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0$$

إلا من أجل $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

لنسقط العلاقة (1) على المحاور الاحداثية فنحصل على جملة المعادلات :

$$\alpha = 0 \quad ; \quad 2\alpha + \beta = 0 \quad ; \quad 3\alpha + 2\beta - \gamma = 0$$

وهذه الجملة من المعادلات لاتقبـــل سوى الحل $\alpha = \beta = \gamma = 0$

وهو المطلوب .

٤١ – برهن أن الأشعة :

$$\vec{a}(1, 2, -1) \; ; \; \vec{b}(3, 2, 4) \; ; \; \vec{c}(5, 6, 2)$$

مرتبطة خطياً :

الحل :

لنسقط العلاقة :

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0$$

على المحاور الاحداثية فنحصل على جملة المعادلات :

$$\alpha + 3\beta + 5\gamma = 0$$

$$2\alpha + 2\beta + 6\gamma = 0$$

$$-\alpha + 4\beta + 2\gamma = 0$$

من هذه المعادلات نجد .

$$\alpha = -2\gamma \qquad \beta = -\gamma \qquad \gamma = \gamma$$

وهذا يعني أن جملة المعادلات السابقة تقبل عدداً غير منته من المحلول، فلو وضعنا $\gamma = 1$ لحصلنا على الحل .

$$\alpha = -2 \;;\quad \beta = -1 \;;\quad \gamma = 1$$

والجملة مرتبطة خطياً وهو المطلوب .

مسائل وتمارين غير محلولة

٤٢ – لدينا النقط $M_1(1, 1)$ و $M_2(2, 2)$ ، $M_3(3, -1)$ فاذا فرضنا أن هذه النقط تشكل ثلاثة رؤوس متتاليـــة في متوازي اضلاع فما هما احداثيا الرأس الرابع .

٤٣ – لدينا $A(2, 3)$ و $B(7, -2)$ لنأخذ على امتداد BA نقطة تبعد عن A بمقدار القطعة AB . المطلوب ايجاد احداثيات هـــذه النقطة :

٤٤ – إذا كان $A(2, 3)$ و $B(6, 6)$ رأسين متتالين في مربع عين الرأسين الباقين A' و B' .

٤٥ – اكتب معادلة الدائرة في الاحداثيات القطبية إذا علمت أنها تمر بالقطب وأن احداثيي مركزها القطبيين هما (r_1 , Θ_1) .

٤٦ – ليكن لدينا مستقيماً g ونقطة P تبعد عنه المسافة $b \neq o$. لندور من P مستقيمـــاً متحولاً D يقطع g في نقطة مثل m . لنحمل على D وابتداءً من m وإلى الجهتين المختلفتين الطول a فنحصل على النقطتين M_1 و M_2 أي $m M_1 = m M_2 = a$ ما هو المحل الهندسي للنقطتين M_1 و M_2 .

١ً – بواسطة الاحداثيات القطبية . حيث نتخذ p قطباً والمحور العمودي على g محوراً قطبياً .

٢ً – بواسطة الاحداثيات الديكارتية التي نأخذها بحيث ينطبق oy على g ويمر المحور ox في P .

٤٧ – أوجد احداثيات النقطة M التي تقسم القطعة $P_1 P_2$ بالنسبة $k = 5/3$ مع العلم أن $P_1 (- 5 , 2)$ و $P_2 (1 , 4)$

٤٨ – النقطة $(9 , 2)$ تقسم القطعة $P_1 P_2$ بالنسبة $k = - 3/7$ أوجد احدثيي النقطة P_2 إذا علمت أن $P_1 (6 , 8)$.

٤٩ – أوجد الاحداثيات الكروية والاسطوانية للنقطة .

$$A \left(\frac{5 \sqrt{2}}{4} , \frac{5 \sqrt{6}}{4} , \frac{5 \sqrt{2}}{2} \right)$$

٥٠ – إذا علمت أن معادلة الكرة في الاحداثيات الديكارتية هي :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

فما هي معادلتها في الاحداثيات الاسطوانية والكروية .

٥١ - ما هي المعادلة الديكارتية لكل من المنحنيين التاليين الممثلين في الاحداثيات الكروية .

أ - $R \cos \Theta = \cos \varphi$

ب - $\varphi = R \sin \Theta$

برهن النظريات التالية تحليلياً .

٥٢ برهن أن قطري شبه المنحرف المتساوي الساقين متساويان .

(ارشاد : يمكن اختيار المحاور الاحداثية على شكل تكون فيه احداثيات رؤوس شبه المنحرف هي : $(a, o); (b, c); (a-b, c); (o, o)$) .

٥٣ - برهن أن القاعدة الوسطى في شبه المنحرف تساوي نصف مجموع قاعدتيه .

٥٤ - برهن انه إذا تساوى مستقيمان متوسطان في مثلث فهو متساوي الساقين .

٥٥ - برهن ان مربع أي ضلع في مثلث مقابل لزاوية حادة يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين مطروحاً منه ضعف جداء أحد هذين الضلعين في مسقط الآخر عليه .

٥٦- في المثلث ABC تقع النقطة D على AB والنقطة E على AC على شكل يكون فيه $AD = 2\,DB$ و $CE = 2\,EA$. برهن أنه إذا كانت F نقطة تقاطع BE مع CD فان :

$$\frac{BF}{FE} = \frac{3}{4} \quad ; \quad \frac{DE}{FC} = \frac{1}{6}$$

٥٧ – احسب الزاوية المحصورة بين الشعاعين :

$$\vec{b} = (- \vec{i} + 2 \vec{j} + 2 \vec{k})$$

$$\vec{c} = (2 \vec{i} - \vec{j} + 2 \vec{k}$$

٥٨ – احسب جيوب تمام الزوايا التي يصنعها الشعاع .

$$\vec{d} = 2 \vec{i} + 2 \vec{j} - \vec{k}$$

مع المحاور الاحداثية .

٥٩ – إذا كان :

$$\vec{a} (2 , - 1 , 1 \; ; \vec{b} (0 , 1 , 3) ; \vec{c} (- 2 , 1 , 6)$$

فاوجد الشعاع $\vec{d}$ العمودي على كل من $\vec{a}$ و $\vec{b}$ والذي يحقق الشرط

$$\vec{c} \, . \, \vec{d} = 1$$

٦٠ – احسب العدد h لتقع الأشعة الثلاثة :

$$\vec{a} = 3 \vec{i} + h \vec{j} - 2 \vec{k}$$

$$\vec{b} = - \vec{i} + 4 \vec{j} + 2 \vec{k}$$

$$\vec{c} = 2 \vec{i} + 5 \vec{j} + 6 \vec{k}$$

في مستو واحد .

٦١ – احسب العددين y و z على شكل يتعامد فيه الشعاع .

$$\vec{a} = 2 \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

مع الشعاعين

$$\vec{b} = - \vec{i} + 4 \vec{j} + 2 \vec{k}$$

$$\vec{c} = 3 \vec{i} + 3 \vec{j} - \vec{k}$$

٦٢ – احسب حجم متوازي السطوح المنشأ على الأشعة .

$$\overrightarrow{OA} = 5\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = 2\,\vec{i} + 6\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = 3\,\vec{i} + \vec{j}$$

٦٣ – ليكن لدينا المثلث ABC حيث $A(5, 1)$ و$B(-2, 2)$ وأما C فتقع على محور السينات . احسب فاصلة C كي يكون سطح المثلث مساوياً 10 .

٦٤ – ليكن لدينا الأشعة .

$$\vec{a} = \vec{i} + 5\,\vec{j}$$

$$\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 2\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}$$

احسب مساقط الأشعة $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a} + \vec{b}$ على الشعاع $\vec{v}$ وتحقق من ان مجموع مسقطي $\vec{a}$ و $\vec{b}$ يساوي مسقط $\vec{a} + \vec{b}$

٦٥– أوجد شعاعي الواحدة المتعامدين اللذين يميلان على oz الميل ذاته والعموديين على الشعاع $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

٦٦ – برهن العلاقة :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \wedge \vec{d}, \vec{e} \wedge \vec{p})$$

$$= (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})(\vec{c}, \vec{e}, \vec{p}) - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{d}, \vec{e}, \vec{p})$$

$$+ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{e})(\vec{p}, \vec{c}, \vec{d}) - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{p})(\vec{e}, \vec{c}, \vec{d})$$

$$+ (\vec{c}, \vec{d}, \vec{a})(\vec{b}, \vec{e}, \vec{p}) - (\vec{c}, \vec{d}, \vec{b})(\vec{a}, \vec{e}, \vec{p})$$

٦٧ – برهن أن حجم الهرم ABCD حيث :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}\,;\ \overrightarrow{OB} = \vec{b}\,;\ \overrightarrow{OC} = \vec{c}\,;\ \overrightarrow{OD} = \vec{d}$$

يعطى بالعبارة :

$$\frac{1}{6}\left[(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) + (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) - (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})\right]$$

٦٨ – اذا كان :

$$\vec{a} = (1, -2, 3);\quad \vec{b} = (2, -1, -1);\quad \vec{c}\ (0, 1, 1)$$

فاحسب :

(١) $\vec{a} \wedge \vec{b}$

(٢) $\vec{b} \wedge \vec{a}$

(٣) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

(٤) $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$

الاجوبة

٤٢– $(2, -2)$

٤٣– $(-3, 8)$

٤٤– $A'(5, -1)$ و $B'(9, 2)$

أو $A'(-1, 7)$ و $B'(3, 10)$

٤٥– $r = 2 r_1 \cos(\Theta - \Theta_1)$

٤٦– $r = \dfrac{b}{\cos\Theta} \mp a$

$$(x^2 - a^2)(b + x)^2 + x^2 y^2 = o$$

٤٧ – $(10, 7)$

٤٨ – $(16, -12)$

٤٩ – $\varrho = 5 \;;\; \Theta = 45^\circ \;;\; \varphi = 60^\circ$

$$r = \frac{5\sqrt{2}}{2} \;;\; \varphi = 60^\circ \;;\; z = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

٥٠ – $\varrho^2 = a^2$

$$r^2 + z^2 = a^2$$

٥١ – آ – $z^2 = \frac{x^2}{y^2 + x^2}$

ب – $y = x \operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2}$

٥٧ – $\frac{\pi}{2}$

٥٨ – $\cos \omega_1 = \frac{2}{3} \;;\; \cos \omega_2 = \frac{2}{3} \;;\; \cos \omega_3 = -\frac{1}{3}$

٥٩ – $(-2, -3, 1)$

٦٠ – $h = -6, 8$

٦١ – $y = -1, z = 3$

٦٢ – 60

٦٣ – $(-8, 32)$

٦٤ – $(4, 2, 6)$

٦٥ – $(1 + h)\vec{i} + (1 - 2h)\vec{j} + (-2 + h)\vec{k}$

$$(1 - 2h)\vec{i} + (1 + h)\vec{j} + (-2 + h)\vec{k}$$

حيث h جذر المعادلة :

$$h^2 + 2h - 2 = 0$$

٦٨-١ - $(5, 7, 3)$

٢ - $(-5, -7, -3)$

٣ - 10

٤ - $(2, -2, -2)$

* * *

الفصـــل الثـاني

المناحي ونقل المحاور الاحداثية

١' ـ المناحي :

١ – منحى المستقيم هو أي مستقيم يوزابه ، والمنحى الموجه لمحور مفروض هو أي محور يوازيه ويتحد معه بالاتجاه .

ويتعين منحى مستقيم بشعاع ما $\overrightarrow{V}$ يوازيه أو بمركبات هذا الشعاع (a,b,c) على المحاور الاحداثية ، نسمي هذه المركبات الأمثال الموجهة للمستقيم .

وإذا كانت (a , b , c) الأمثال الموجهة لمستقيم . وكان k عدداً جبرياً كيفياً غير مساو للصفر فان (ka , kb , kc) تكون كذلك الأمثال الموجهة للمستقيم ذاته .

ويتعين المنحى الموجه لمحور بشعاع ما $\overrightarrow{U}$ يوازيه ويتحد معه بالاتجاه، وتسمى مركبات الشعاع $\overrightarrow{U}$ على المحاور الاحداثية الأمثال الموجهة للمحور .

وإذا كانت (a , b , c) الأمثال الموجهة لمحور وكان k عدداً موجباً كيفياً فان (ka , kb , kc) تكون كذلك الأمثال الموجهة للمحور نفسه .

إذا كان الشعاع $\overrightarrow{U}$ شعاع واحده فعندئذ ندعو مركباته على المحاور الاحداثية الوسطاء الموجهة للمحور .

تسمى الزوايا التي يصنعها محور مفروض مع المحاور الاحداثية الزوايا الموجهة للمحور . إن جيوب تمام هذه الزوايا هي الوسطاء الموجهة للمحور .

٢ – تتعين زاوية محورين Θ ، الأمثال الموجهة للأول هي (a , b , c) والثاني هي (a′ , b′ , c′) بأحد الدستورين :

$$\cos \Theta = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

$$\sin \Theta = \frac{\sqrt{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

وأما زاوية مستقيمين فتساوي زاوية محورين موازيين لهما أو تكملها .

٣ – يتعامد محوران إذا كان :

$$aa' + bb' + cc' = o$$

ويتوازيان إذا كان :

$$bc' - cb' = ca' - ac' = ab' - ba' = o$$

أو :
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

٤ – إذا كان ميلا المستقيمين . D_1 و D_2 في المستوي oxy هما m_1 و m_2 على التتالي وإذا كانت Θ زاوية المستقيم D_2 مع D_1 فان :

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

٢' – نقل المحاور الاحداثية

قد لا يؤدي اختيار المحاور الاحداثية ، عند البحث عن معادلة بعض المحلات الهندسية إلى أبسط شكل لهذه المعادلة ، وقد لا تظهر معادلة المنحني ، والتي هي ليست إلا علاقــة بين الاحداثيين x و y لنقطة متحولة عليه ، خواص هذا المنحني إذا كان منسوباً لجملة ما من المحاور الاحداثية . ولذلك فاننا نضطر أحياناً إلى نقل المحاور الاحداثية . والنقل أما ان يكون انسحاباً أو دوراناً او أن يكون انسحاباً ودوراناً بآن واحد .

١ – ففي الانسحاب ننقل مبدأ الاحداثيات o إلى موضع جديد A دون ان يطرأ أي تغيير على منحى وجهة المحاور الاحداثية ،

في المستوي : إذا كانت x و y احداثيي نقطة ما في المحاور القديمة و X و Y احداثيي النقطة ذاتها في المحاور الجديدة و x_o و y_o احداثيي A في المحاور القديمة فعندئذ يكون :

$$x = x_o + X$$
$$y = y_o + Y$$

في الفراغ : إذا كانت x و y و z احداثيات نقطة ما في المحاور القديمة و X و Y و Z احداثيات ذات النقطة في المحاور الجديدة و x_o و y_o و z_o احداثيات المبدأ الجديد في المحاور القديمة فعندئذ يكون :

$$x = x_o + X$$
$$y = y_o + Y$$
$$z = z_e + Z$$

٢ - وفي الدوران يبقى مبدأ الاحداثيات ثابتاً وتدور المحاور الاحداثية حول هذا المبدأ الثابت . ففي المستوي تبقى المحاور الجديدة في مستوي المحاور القديمة نفسه . فاذا كانت oxy مجموعة المحاور القديمة و oXY مجموعة المحاور الجديدة وكانت الزاوية بين ox و oX تساوي Θ أي :

$$(\ ox,oX\ ) = \Theta$$

فعندئذ تكون دساتير النقل بالدوران هي :

$$x = X \cos \Theta - Y \sin \Theta$$
$$y = X \sin \Theta + Y \cos \Theta$$

في الفراغ : اذا كانت $(\alpha_1 \text{ ، } \alpha_2 \text{ ، } \alpha_3)$ و $(\beta_1 \text{ ، } \beta_2 \text{ ، } \beta_3)$ و $(\gamma_1 \text{ ، } \gamma_2 \text{ ، } \gamma_3)$ هي وسطاء توجيه المحاور الجديدة o X Y Z بالنسبة للمحاور القديمة oxyz ، فعندئذ تكون دساتير النقل بالدوران هي :

$$x = \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z$$
$$y = \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z$$
$$z = \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z$$

٣ – وفي الانسحاب والدوران معاً تكون دساتير النقل في المستوي هي :

$$x = x_0 + X \cos \Theta - Y \sin \Theta$$
$$y = y_0 + X \sin \Theta + Y \cos \Theta$$

وفي الفراغ :

$$x = x_0 + \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z$$
$$y = y_0 + \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z \qquad (١)$$
$$z = z_0 + \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z$$

٤ – نحتاج احياناً تبديل المحاور الاحداثية القائمة بمحاور مائلة فـــاذا كانت oxy مجموعة محاور احداثية قائمة في المستوي و oXY مجموعة محاور مائلة متحدة مع الأولى في المبدأ ، واذا كانت (α_1 و β_1) و (α_2 و β_2) وسطاء توجيه المحورين الجديدين في جملة المحاور القديمة فعندئذ يكون :

$$x = \alpha_1 X + \alpha_2 Y$$
$$y = \beta_1 X + \beta_2 Y$$

اما إذا كان مبدأ المجموعة الجديدة غير منطبق على مبدأ المجموعـــة القديمة ، واذا كانت x_0 و y_0 احداثيي المبدأ الجديد بالنسبة للمجموعة القديمة فعندئذ تكون دساتير تبديل المحاور هي :

$$x = x_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 Y$$
$$y = y_0 + \beta_1 X + \beta_2 Y$$

اما في الفراغ فان دساتير التبديل هي نفس الدساتير (١) ، إلا انه لاتكون في هذه الحالة وسطاء التوجيه مساوية لجيوب تمام الزوايا التي تصنعهـــا المحاور الجديدة مع المحاور القديمة .

مسائل وتمارين محلولة

٦٩ ـ اذا علمت أن امثال توجيه منحى موجه هي :

$$(2, 3, 6)$$

احسب وسطاء توجيهه :

الحـل :

لمـا كانت (6 ، 3 ، 2) امثال توجيـه المنحى المفروض فان (2k , 3k , 6k) كذلك هي أمثال توجيه نفس المنحى الموجه بشرط أن يكون $k > 0$.

ولما كانت وسطاء التوجيه هي مركبات شعاع واحدة ، فانه يكفي ن نعين k على شكل يكون فيه :

$$(2k)^2 + (3k)^2 + (6k)^2 = 1$$

ويكون : $49k^2 = 1$

ويكون بالتالي :

$$k = \frac{1}{7}$$

فوسطاء التوجيه المطلوبة هي :

$$\frac{6}{7} \text{ و } \frac{3}{7} \text{ و } \frac{2}{7}$$

طريقة اخرى : لما كانت أمثال التوجيه لمنحى موجه هي مركبات شعاع ما يوازي هذا المنحى ويتحد معه بالاتجـــاه فان (6 , 3 , 2) تمثل مركبات شعاع يوازي المنحى المفروض ويتحد معه بالاتجـاه . ان طول هذا الشعاع هو :

$$\sqrt{4 + 9 + 36} = 7$$

ونحصل على مركبات شعاع واحـدة مواز للمنحى المفروض ومتحد معه بالاتجاه بتقسيم الشعاع السابق على 7 وبذلك تكون وسطــاء التوجيه هي :

$$\frac{6}{7} \text{ و } \frac{3}{7} \text{ و } \frac{2}{7}$$

٧٠ – إذا كانت α و β و γ الزوايا الموجهه لمحور مفروض فبرهن أن :

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$$

الحـل :

نعلم أن مركبات شعاع الواحدة الموازي للمحور المفروض والمتحد معه بالاتجاه هي : $\cos \alpha$ ، $\cos \beta$ ، $\cos \gamma$ ولذلك فان :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

لنعوض في هذه العلاقة جيوب التمام بما يساويها بدلالة الجيوب فنجد :

$$1 - \sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 \beta + 1 \quad \sin^2 \gamma = 1$$

ومنه :

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$$

وهو المطلوب .

٧١- لدينا النقطتان $P(1, -3, 4)$ و $Q(3, 0, 4)$. أوجد جيوب التمام الموجهة لكل من $\overrightarrow{oP}$ و $\overrightarrow{oQ}$ و $\overrightarrow{pQ}$

الحـل :

من الواضح ان طول الشعاع $\overrightarrow{oP}$ هو :

$$\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{26}$$

ولذلك فإن جيوب التمام الموجهة لـ $\overrightarrow{oP}$ هي :

$$\frac{1}{\sqrt{26}} \; ; \; \frac{-3}{\sqrt{26}} \; ; \; \frac{4}{\sqrt{26}}$$

وأما طول $\overrightarrow{oQ}$ فيساوي 5 وجيوب التمام الموجهة له هي :

$$\frac{3}{5} \; , \; 0 \; ; \; \frac{4}{5}$$

وبما انه يمكن كتابة $\overrightarrow{PQ}$ على الشكل :

$$\overrightarrow{pQ} = \overrightarrow{oQ} - \overrightarrow{oP}$$

فجيوب التمام الموجهة له هي :

$$\frac{2}{\sqrt{13}} \; , \; \frac{3}{\sqrt{13}} \; , \; 0$$

٧٢- لدينا النقط $P(3, 4, 5)$ و $Q(4, 6, 3)$ و $R(-1, 2, 3)$ و $S(1, 0, 5)$ أوجد مسقط $\overrightarrow{RS}$ على $\overrightarrow{QP}$

الحـل :

من الواضح أن :

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{oS} - \overrightarrow{oR} = (2, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{oP} - \overrightarrow{oQ} = (-1, -2, 2)$$

وبما ان الضرب العددي لشعاعين يساوي طول أحدهما بمسقط الآخر عليه ، وحيث أن طول $\overrightarrow{QP}$ يساوي 3 فإن مسقط $\overrightarrow{RS}$ على $\overrightarrow{QP}$ يساوي الجداء العددي لهذين الشعاعين مقسوماً على 3 أي يساوي :

$$\frac{2(-1) - 2(-2) + 2(2)}{3} = \frac{-2+4+4}{3} = 2$$

٧٣- لدينـــا النقط $P(2, 3, -1)$ و $Q(3, 5, -3)$ و $R(1, 2, 3)$ و $S(3, 5, 7)$

برهن أن PQ متعامد مع RS .

الحــل :

يمكن ، كما في التمرين السابق ، حساب مركبات كل من $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{RS}$ فنجد $(1, 2, -2)$ و $(2, 3, 4)$. والجداء العددي لهذين الشعاعـــين يساوي :

$$1(2) + 2(3) - 2(4) = 0$$

وبما أنه معدوم فالشعاعان متعامدان وهو المطلوب .

٧٤- لدينا المثلث ABC :

$$A(3, -5, -1) ; B(2. -3, -2) ; C(5, -1, -1)$$

برهن أن هذا المثلث قائم الزاوية في B .

الحــل :

يمكن اعتبار مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ وهي :

$$a = 2 - 3 = -1$$
$$b = -3 - (-5) = 2$$
$$c = -2 - (-1) = -1$$

الأمثال الموجهه للمستقيم AB ، ويمكن اعتبار مركبات الشعـــاع
$\overrightarrow{BC}$ وهي $a' = 3 \; ; \; b' = 2 ; c' = 1$.
الامثال الموجهه للمستقيم BC .

ولـكي يكون المثلث ABC قائم الزاوية في B يلزم أن يكون :
$$a\,a' + b\,b' + c\,c' = 0$$

بالتبديل بهذه العلاقة نجد :
$$-1(3) + 2(2) - 1(1) = 0$$

وهو المطلوب .

٧٥ – لدينا المثلث ABC :
$$A(2 , 5 , -1) \quad B(1 , -1 , 3) \quad C(2 , 1 , 0)$$

١ً – احسب الأمثال الموجهة لمناحي أضلاع المثلث .

٢ً – احسب زواياه .

الحــل :

١ً – ان الأمثال الموجهة لمنحى الضلع AB هي :
$$a_1 = 1 - 2 = -1 \quad b_1 = -1 - 5 = -6 \quad c_1 = 3 + 1 = 4$$

بنفس الطريقة نجد الأمثال الموجهة لمنحى الضلع BC :
$$a_2 = 1 \quad b_2 = 2 \quad c_2 = -3$$

والأمثال الموجهة لمنحى الضلع AC

$$a_3 = 0 \qquad b_3 = -4 \quad c_2 = 1$$

٢ – لحساب الزاوية ABC ، ولنرمز لها بـ ω_1 ، نلاحظ :

$$\cos \omega_1 = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$$

وبما أن :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1(0) - 6(-4) + 4(1) = 28$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 36 + 16} = \sqrt{53}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0 + 16 + 1} = \sqrt{17}$$

يكون :

$$\cos \omega_1 = \frac{28}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{17}} = \frac{28}{\sqrt{901}}$$

بالطريقة نفسها نجد إذا رمزنا بـ ω_2 ، ω_3 للزاويتين ABC و ACB على الترتيب :

$$\cos \omega_2 = \frac{25}{\sqrt{742}} \; ; \cos \omega_3 = \frac{-11}{\sqrt{238}}$$

٧٦ – ليكن المحور $o\Delta$ المعين بجيوب تمام توجيهه (α, β, γ) والنقطة $M(x, y, z)$ ، احسب احداثيات النقطة M' نظير M بالنسبة للمحور $o\Delta$.

أعد السؤال بفرض أن المحور لايمر بالمبدأ o إنما يمر بالنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$.

الحـل :

لنفرض أن x', y', z' احداثيات النقطة M' وأن I مسقط M على $o\Delta$ فعندئذ يكون القياس الجبري لـ $\overrightarrow{oI}$ (مسقط $\overrightarrow{oM}$ على المحور $o\Delta$) يساوي الجداء العددي للشعاع $\overrightarrow{oM}$ بشعاع واحدة للمحور $o\Delta$ أي :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z$$

وبذلك تكون مركبات الشعاع $\overrightarrow{oI}$ هي :

$$\alpha' = (\alpha x + \beta y + \gamma z)\,\alpha$$
$$\beta' = (\alpha x + \beta y + \gamma z)\,\beta$$
$$\gamma' = (\alpha x + \beta y + \gamma z)\,\gamma$$

ويكون :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IM'}$$
$$= \overrightarrow{OM} + 2\,\overrightarrow{MI}$$
$$= 2\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OM}$$

وبالتالي :

$$x' = 2\,\alpha' - x = (2\,\alpha^2 - 1)\,x + 2\alpha\,\beta\,y + 2\alpha\,\gamma\,z$$
$$y' = 2\,\beta' - y = 2\beta\,\alpha\,x + (2\,\beta^2 - 1)\,y + 2\beta\,\gamma\,z$$
$$z' = 2\,\gamma' - z = 2\gamma\,\alpha\,x + 2\gamma\,\beta\,y + (2\,\gamma^2 - 1)\,z$$

اما اذا لم يمر المحور المفروض بالنقطة o فاننا نجد باعادة المحاكمات السابقة أن :

$$x' = x_0 + (2\alpha^2 - 1)(x - x_0) + 2\alpha\beta(y - y_0) + \alpha\gamma(z - z_0)$$
$$y' = y_0 + 2\beta\alpha(x - x_0) + (2\beta^2 - 1)(y - y_0) + 2\beta\gamma(z \quad z_0)$$
$$z' = z_0 + 2\gamma\alpha(x - x_0) + 2\gamma\beta(y - y_0) + (2\gamma^2 - 1)(z - z_0)$$

٧٧– إذا كان احداثيا نقطة ما M في مجموعـــة محاور احداثيـة oxy هما :

$$x = 7 \quad y = 8$$

فأوجد احداثييهذه النقطة في مجموعة محاور جديدة AXY إذا علمت :

(١) أن المبدأ الجديد يقع في النقطة (3 ، 2) A

(٢) ان النقطة (6و0) تقـــع على النصف الموجب لمحور العينات الجديد AY .

الحـل :

لنسحب زاوية الدوران Θ .

ان ميل محور العينات الجديد هو :

$$\frac{0 - 3}{6 - 2} = -\frac{3}{4}$$

وبما ان محور العينات الجديد يصنع مع ox زاوية مقدارهـــا $(\Theta + \frac{\pi}{2})$ اذن :

$$tg\left(\Theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

ومنـه :

$$tg\ \Theta = \frac{4}{3}$$

وبما أن محور العينات الجديد يصنع مع محور السينات زاوية محصورة بين $-\frac{\pi}{2}$ والصفر أي بين $\frac{3\pi}{2}$ و 2π ، وحيث أن محور السينات الجديد عمودي مباشرة على محور العينات الجديـــد فإن الزاوية Θ محصورة بين π و $\frac{3\pi}{2}$ ، إذن :

$$\cos\Theta = -\frac{3}{5} \quad , \quad \sin\Theta = -\frac{4}{5}$$

وعلى هذا فان دساتير التحويل :

$$x = x_o + X\cos\Theta - Y\sin\Theta$$
$$y = y_o + X\sin\Theta + Y\cos\Theta$$

تصبح في هذه الحالة .

$$x = 2 - \frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y$$

$$y = 3 - \frac{4}{5}X - \frac{3}{5}Y$$

ومن أجل النقطة M يكون :

$$7 = 2 - \frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y$$

$$8 = 3 - \frac{4}{5}X - \frac{3}{5}Y$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد :

$$X = = 7 \quad , \quad Y = 1$$

٧٨ - تقع رؤوس مربـــع في النقط (0 ، 0) ، (0 ، 2) ،

(2 ، 2) ، (2 ، 0) على التوالي . أوجد دساتير نقل المحـــاور عندما تتخذ أقطـــار المربع كمحاور احداثية جديـدة OXY بشكل يقـع فيه الرأس (2 ، 0) على النصف الموجب للمحور OX .

الحـل :

من الواضح ان محور السينات يمر بالنقطتين (2 ، 0) و (0 ، 2) فميله يكون :

$$tg\ \Theta = \frac{2-0}{0-2} = -1$$

ويكون بالتالي :

$$\Theta = -\frac{\pi}{4}$$

وعلى هذا :

$$\cos\Theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\ \Theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

واما المبدأ الجديد ، الذي يقع في مركز المربع ، فهو منتصف القطعة الواصلة بين النقطتين (2 ، 0) و (0 ، 2) أو في منتصف القطعة الواصلة بين (0 ، 0) و (2 ، 2)

اذن :

$$x_0 = \frac{2+0}{2} = 1$$

$$y_0 = \frac{2+0}{2} = 1$$

وتكون بالتالي دساتير التحويل :

$$x = 1 + \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$$

$$y = 1 - \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$$

٧٩ – في نقل للمحاور يقع المبدأ الجديد في النقطـــة $(1, -2)$. ويصنـع محور العينات الجديد مع محور السينات القديم زاوية حادة موجبة ذات ظل يساوي $\frac{3}{4}$ ابحث عن النقط التي تكون من أجلها الاحداثيات القديمة مساوية للاحداثيات الجديدة .

الحـــل :

إذا كانت Θ الزاوية التي يصنعها محور السينات الجديد مـع محور السينات القديم فإن :

$$tg\left(\Theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

ومنـــه

$$tg\,\Theta = -\frac{4}{3}$$

وبما أن الزاوية Θ محصورة بين $\frac{3\pi}{2}$ و 2π فإن :

$$\cos\Theta = \frac{3}{5} \quad , \quad \sin\Theta = -\frac{4}{5}$$

وعلى هذا تكون دساتير التحويل :

$$x = 1 + \frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y$$

$$y = -2 - \frac{4}{5} X + \frac{3}{5} Y$$

وللحصول على النقط التي من اجلها تكون الاحداثيات القديمة مساوية للاحداثيات الجديدة نضع :

$$x = X \text{ , } y = Y$$

فنجد :

$$x = 1 + \frac{3}{5} x + \frac{4}{5} y$$

$$y = -2 - \frac{4}{5} x + \frac{3}{5} y$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد :

$$x = -\frac{3}{2} \quad , \quad y = -2$$

٨٠ — لدينا المنحني الممثل ، في مستوي الاحداثيات xoy ، بالمعادلة :

$$x^2 + x y + 2 x + y - 2 = 0$$

اوجد معادلة هذا المنحني اذا سحبنا المحاور الاحـــداثية الى مركز تناظر المنحني .

الحـل :

إن مبدأ الاحداثيات ليس مركز تناظر للمنحني لاننا اذا بدلنـــا x بـ $-x$ و y بـ $-y$ فإن معادلة المنحني تتغير بسبب وجود حدود من المرتبة الأولى وهما $2x + y$ ولذلك فاننا نسحب المحاور إلى مبدأ جديد x_0 ، y_0 .

ان دساتير النقل بالانسحاب هي :

$$x = x_0 + X$$

$$y = y_0 + Y$$

لنبدل في معادلة المنحني فنجد :

$$(x_o + X)^2 + (x_o + X)(y_o + Y) + 2(x_o + X)$$
$$+ y_o + Y - 2 = 0$$

أو :

$$X^2 + XY + (2x_o + y_o + 2)X + (x_o + 1)Y +$$
$$+ x_o^2 + x_o y_o + 2x_o + y_o - 2 = 0$$

وانعين x_o و y_o بشكل تنعدم فيه الحدود التي تحوي X و Y في المعادلة الجديدة المنسوبة الى المحاور الجديدة . ان هذا يتم اذا كان :

$$2x_o + y_o + 2 = 0$$
$$x_o + 1 = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد :

$$x_o = -1 \; ; \qquad y_o = 0$$

ومعادلة المنحني تأخذ الشكل :

$$X^2 + XY - 3 = 0$$

وهذه هي المعادلة المطلوبة اذ يلاحظ انهـا تمثل منحنياً متناظراً بالنسبة لنقطة الاصل .

٨١ – برهن ان دوراناً للمحاور بزاوية مقدارها α ينقل العبارة :

$$A x^2 + 2Bxy + cy^2$$

إلى الشكل :

$$A_1 X^2 + 2B_1 XY + C_1 Y^2$$

حيث :

$$A_1 + C_1 = A + C$$
$$A_1 - C_1 = 2\ B \sin 2\alpha + (A - C) \cos 2\alpha$$
$$2\ B_1 = 2\ B \cos 2\alpha - (A - C) \sin 2\alpha$$
$$B_1^2 - A_1 C_1 = B^2 - AC$$

واستنتج من ذلك أن دوراناً للمحاور بزاوية مقدارها α معطــاة بالعلاقة :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}$$

تنقل المعادلة :

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0$$

إلى الشكل :

$$A_1 X^2 + C_1 Y^2 + D_1 X + E_1 Y + F_1 = 0$$

الحـل :

إن دساتير النقل بالدوران هي :

$$x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha$$
$$y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha$$

لنبدل في العبارة :

$$A x^2 + 2 B x y + c y^2$$

فنجد :

$$A (X \cos \alpha - Y \sin \alpha)^2 + 2 B (X \cos \alpha - Y \sin \alpha)$$
$$(X \sin \alpha + Y \cos \alpha) + C (X \sin \alpha + Y \cos \alpha)^2$$

أو :

$$
\begin{aligned}
&(A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha)\,X^2 \\
&-2\,(A\cos\alpha\sin\alpha - B\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha - C\sin\alpha\cos\alpha)\,XY \\
&+(A\sin^2\alpha - 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\cos^2\alpha)\,Y^2
\end{aligned}
$$

أو :

$$A_1 X^2 + 2B_1 XY + C_1 Y^2$$

حيث :

$$
\begin{aligned}
A_1 &= A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha \\
B_1 &= (C-A)\cos\alpha\sin\alpha + B\cos 2\alpha \\
C_1 &= A\sin^2\alpha - 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\cos^2\alpha
\end{aligned}
$$

من هذه العلاقة نجد بسهولة أن :

$$
\begin{aligned}
A_1 + C_1 &= A + C \\
A_1 - C_1 &= 2B\sin 2\alpha + (A-C)\cos 2\alpha \\
2B_1 &= 2B\cos 2\alpha - (A-C)\sin 2\alpha \\
B_1^2 - A_1C_1 &= B^2 - AC
\end{aligned}
$$

وهو الجزء الأول من المطلوب . من أجـــل الجزء الثاني نختار على شكل تنعدم فيه أمثال XY في الشكل الجديد للعبارة أي :

$$B_1 = O$$

فنجد :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C}$$

وهو المطلوب .

٨٢– المطلوب اختزال معادلة المنحني :

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

وذلك باختيار مناسب للمحاور الاحداثية .

الحـل :

لنسحب المحاور الاحداثية إلى النقطة A ذات الاحداثيين x_0 و y_0 ، فعندئذ تكون دساتير النقل بالانسحاب :

$$x = x_0 + X$$
$$y = y_0 + Y$$

لنبدل في معادلة المنحني فنجد :

$$5(x_0 + X)^2 + 4(x_0 + X)(y_0 + Y) + 8(y_0 + Y)^2$$
$$- 32(x_0 + X) - 56(y_0 + Y) + 80 = 0$$

أو :

$$5X^2 + 4XY + 8Y^2 + (10x_0 + 4y_0 - 32)X$$
$$+ (4x_0 + 16y_0 - 56)Y + 5x_0^2 + 4x_0y_0 + 8y_0^2$$
$$- 32x_0 - 56y_0 + 80 = 0$$

لنعين x_0 و y_0 على شكل تنعـدم فيـه أمثال X و Y في المعادلة الأخيرة ، أي :

$$10x_0 + 4y_0 - 32 = 0$$
$$4x_0 + 16y_0 - 56 = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نجـد احدثيي المبدأ الجديد ، والذي يمثل في الحقيقة مركز تناظر المنحني المفروض .

$$x_0 = 2 \; ; \quad y_0 = 3$$

وبذلك تصبح معادلة المنحني بالنسبة للمحاور الجديدة :

$$5 X^2 + 4 XY + 8 Y^2 - 36 = 0 \qquad (1)$$

لندور بعد ذلك المحاور الاحداثية زاوية مقدارها Θ معطاة بالعلاقة (انظر المسألة السابقة) :

$$tg\, 2\,\Theta = \frac{2\,B}{A - C} = \frac{4}{5 - 8} = -\frac{4}{3}$$

ويكون :

$$\cos 2\,\Theta = -\frac{3}{5}\ ;\ \sin 2\,\Theta = \frac{4}{5}$$

وأما دساتير الدوران فهي :

$$X = X_1 \cos\Theta - Y_1 \sin\Theta$$

$$Y = X_1 \sin\Theta + Y_1 \cos\Theta$$

لنبدل في معادلة المنحني فنجد :

$$A_1 X^2 + C_1 Y^2 - 36 = 0$$

حيث :

$$A_1 + C_1 = 13$$

$$A_1 - C_1 = 4 \sin 2\,\Theta - 3 \cos 2\,\Theta = 5$$

ومنه :

$$A_1 = 9 \qquad C_1 = 4$$

وتكون معادلة المنحني المطلوبة هي :

$$9 X^2 + 4 Y^2 = 36 \qquad (2)$$

هذا ويلاحظ أنه من الممكن ، عند حساب $\cos 2\,\Theta$ و $\sin 2\,\Theta$ من العلاقة :

$$\operatorname{tg} 2\,\Theta = -\frac{4}{3}$$

أن نأخذ :

$$\cos 2\,\Theta = \frac{3}{5} \qquad \sin 2\,\Theta = -\frac{4}{5}$$

فعندئذ يكون :

$$A_1 + C_1 = 13$$

$$A_1 - C_1 = -5$$

ومنه :

$$A_1 = 4 \qquad C_1 = 9$$

وتصبح معادلة المنحني :

$$4\,X^2 + 9\,Y^2 = 36 \qquad (3)$$

إذا لم يكن مطلوباً حساب زاوية الدوران Θ فعندئذ يكون من الممكن الحصول على معادلة المنحني بعد الدوران بدءاً من (1) بوساطة العلاقتين :

$$A_1 + C_1 = A + C = 5 + 8 = 13$$

$$-A_1\,C_1 = B^2 - A\,C = 4 - 40 = -36$$

لأن $B_1 = 0$ ، وبحل هاتين المعادلتين نجد : $A_1 = 9$; $C_1 = 4$ أو $A_1 = 4$; $C_1 = 9$ وبذلك نصل إلى المعادلتين (2) و (3) .

٨٣ — اختزل معادلة القطع المكافيء :

$$x^2 - 2\,x\,y + y^2 - 2\,x - 2\,y + 1 = 0$$

وذلك بأن تبدأ بدوران للمحاور ينعدم بسببه الحد الذي يحوي XY

ثم تسحب بعـــد ذلك المحاور على شكل لا يبقى في المعادلة سوى حدين فقط .

الحـل :

إن زاوية الدوران تتعين من العلاقة :

$$tg\ 2\ \Theta = \frac{2\ B}{A - C} = \frac{-\ 2}{1 - 1}$$

ومنـــه :

$$2\ \Theta = \frac{\pi}{2}$$

ويكون :
$$\Theta = \frac{\pi}{4}$$

وتصبح دساتير الدوران :

$$x = \frac{X - Y}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}$$

لنبدل في المعادلة الأصلية فنجد :

$$2\ Y^2 - \frac{4\ X}{\sqrt{2}} + 1 = o$$

لنسحب المحاور إلى النقطة (o ، $\frac{\sqrt{2}}{4}$) ، فعندئـــذ تصبح المعادلة على الشكل :

$$Y_1^2 = \sqrt{2}\ X_1$$

٨٤ – لدينا المعادلة من الدرجة الثانية :

$$A\ x^2 + 2\ Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o$$

١ – برهن انه إذا كان $AC - B^2 = o$ ، $A > o$ ، فعندئـذ يمكن أن نكتب :

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + D x + E y + F =$$
$$(a x + b y + h)^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = o$$

حيث :

$$\alpha = D - 2 a h \; ; \beta = E - 2 b h \; ; \gamma = F - h^2$$
$$A = a^2 \quad ; \qquad B = a b$$

٢ – برهن انه يمكن اختيار العـدد h على شكل يتعامد فيـه المستقيم :

$$a x + b y + h = o$$

مع المستقيم :

$$\alpha x + \beta y + \gamma = o$$

وذلك ضمن الشرط :

$$\frac{D}{a} \neq \frac{E}{b}$$

الحـل :

١ – لنبدل A بـ a^2 في المعادلة المفروضة فنجد :

$$a^2 x^2 + 2 B x y + C y^2 + D x + E y + F = o$$

وحيث أن :

$$B = a b$$

و :

$$C = \frac{B^2}{A} = \frac{a^2 b^2}{a^2} = b^2$$

فانه يمكن كتابة المعادلة على الشكل :

$$(ax + by + h)^2 + (D - 2ah)x + (E - 2bh)y + F - h^2 = 0$$

أو :

$$(ax + by + h)^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

٢ – كي يتعامد المستقيمان يجب أن يكون :

$$a\alpha + b\beta = 0$$

أو :

$$a(D - 2ah) + b(E - 2bh) = 0$$

ومنه :

$$h = \frac{aD + bE}{2(a^2 + b^2)}$$

وهي قيمة h المطلوب بشرط أن لاتجعل كلاً من α و β معدومين بآن واحد .

لذلك نحسب قيمة α و β :

$$\alpha = D - \frac{a(aD + bE)}{a^2 + b^2} = \frac{b(bD - aE)}{a^2 + b^2}$$

$$\beta = E - \frac{b(aD + dE)}{a^2 + b^2} = \frac{a(aE - Db)}{a^2 + b^2}$$

ومن هاتين القيمتين نلاحظ أن α و β تنعدمان بآن واحد اذا كان :

$$aE - Db = 0$$

أي :

$$\frac{D}{a} = \frac{E}{b}$$

وهذا ما يخالف نص المسألة وهو المطلوب .

٨٥ — اختزل المعادلة :

$$x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$$

مستفيداً من المسألة السابقة .

الحـــل :

نلاحظ أن :

$$B^2 - AC = 1 - 1 = 0$$

ولذلك يمكن كتابة المعادلة المفروضة على الشكل :

$$(x + y + h)^2 - (8 + 2h)x - 2hy + 4 - h^2 = 0$$

لنعين h على شكل يتعامد فيه المستقيمان :

$$x + y + h = 0$$

$$-(8 + 2h)x - 2hy + 4 - h^2 = 0$$

فنجد :

$$h = -2$$

وتصبح المعادلة :

$$(x + y - 2)^2 - 4(x - y) = 0$$

لتكن المحاور الاحداثية منطبقة على المستقيمين المتعامدين .

$$x + y - 2 = 0$$

$$x - y = 0$$

فتكون دساتير التحويل :

$$x = 1 + \frac{X - Y}{\sqrt{2}}$$

$$y = 1 + \frac{X + Y}{\sqrt{2}}$$

وبذلك تصبح المعادلة على الشكل :

$$X^2 + 2\sqrt{2}\,Y = o$$

٨٦ – المعادلتان الوسيطيتان للهيبوسيكلوئيد هما :

$$x = a\,(2\cos t + \cos 2t) \;;\quad y = a\,(2\sin t - \sin 2t)$$

سحبنا محوري الاحداثيات الى النقطة $O(-a, o)$ اكتب المعادلة الديكارتية للمنحني بالنسبة لهذين المحورين الجديدين .

الحـل :

من الواضح أن :

$$X = x + a \qquad\qquad Y = y$$

أي :

$$X = a\,(2\cos t + 2\cos^2 t) = 2a\cos t\,(1 + \cos t)$$

$$Y = a\,(2\sin t - 2\sin t\cos t) = 2a\sin t\,(1 - \cos t)$$

ومن هاتين المعادلتين نجد :

$$(X^2 + Y^2)^2 + 4aX(5Y^2 - 3X^2) + 4a^2(12X^2 - Y^2) - 64a^3X = o$$

٨٧ – المعادلتان الوسيطيتان للسيكلوئيد هما :

$$x = a\,(t - \sin t) \;;\quad y = a\,(1 - \cos t)$$

سحبنا محوري الاحداثيـــات إلى ذروة السيكلوئيد $S(\pi a, 2a)$ اكتب المعادلتين الوسيطيتين للسيكلوئيد بالنسبة للمحورين الجديدين .

الحـل :

من الواضح أن :

$$x = \pi a + X \;;\quad y = 2a + Y$$

ومنه :

$$X = a(t - \sin t - \pi) \quad ; \quad Y = -a(1 + \cos t)$$

يمكن ادخال وسيط جديد بدلاً من الوسيط t ، فلو وضعنا مثلاً $u = t - \pi$ لوجدنا :

$$X = a(u + \sin u) \quad ; \quad Y = a(\cos u - 1)$$

٨٨ – لدينا السطح الممثل ، في مجموعة المحاور الاحداثية القائمة ، بالمعادلة .

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz + 6xz + 2x - 6y - 2z = 0$$

اوجد معادلة هذا السطح اذا سحبنا المحاور الاحداثية الى مركز تناظر السطح .

الحل :

ان دساتير النقل بالانسحاب هي :

$$x = x_0 + X$$
$$y = y_0 + Y$$
$$z = z_0 + Z$$

لنبدل في معادلة السطح فنجد :

$$(x_0 + X)^2 + (y_0 + Y)^2 + (z_0 + Z)^2 + 2(x_0 + X)(y_0 + Y)$$
$$- 2(y_0 + Y)(z_0 + Z) + 6(x_0 + X)(z_0 + Z) + 2(x_0 + X)$$
$$- 6(y_0 + Y) - 2(z_0 + Z) = 0$$

لنعين x_0 و y_0 و z_0 بشكل تنعدم فيه امثال كل من X و Y و Z :

$$2x_o + 2y_o + 6z_o + 2 = o$$
$$2y_o + 2x_o - 2z_o - 6 = o$$
$$2z_o - 2y_o + 6x_o - 2 = o$$

وبحل جملة المعادلات هذه نجد :

$$x_o = 1 = ; \quad y_o = 1 \quad ; \quad z_o = -1$$

ومعادلة السطح تأخذ الشكل :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY - 2YZ + 6XZ - 1 = o$$

وهذه هي المعادلة المطلوبة إذ يلاحظ انها تمثل سطحاً متناظراً بالنسبة لنقطة الاصل :

٨٩ – ليكن لدينا المعادلتان :

$$x + y + z = o$$
$$yz + zx + xy + a^2 = o$$

لندور المحاور oxyz إلى الوضع الجديد oXYZ على شكل تكون فيه وسطاء توجيه المحاور الجديدة على التوالي هي :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, o, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

ماهو الشكل الجديد للمعادلتين . استنتج من ذلك ان الحل المشترك للمعادلتين هو دائرة نصف قطرها $\sqrt{2}\,a$.

الحـل :

ان دساتير النقل بالدوران في هذه الحالة تكون :

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} X + \frac{1}{\sqrt{2}} Y + \frac{1}{\sqrt{6}} Z$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} X - \frac{2}{\sqrt{6}} Z$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} X - \frac{1}{\sqrt{2}} Y + \frac{1}{\sqrt{6}} Z$$

بالتبديل في المعادلتين المفروضين نجد :

$$X = 0$$

$$2 X^2 - Y^2 - Z^2 + 2 a^2 = 0$$

والحل المشترك للمعادلتين هو :

$$Y^2 + Z^2 = 2 a^2$$

وهي معادلة دائرة ، نصف قطرها $\sqrt{2}\, a$

مسائل وتمارين غير محلولة

٩٠- احسب زوايا المثلث PQR حيث :

$P(2, 3, 5)$; $Q(-, 1, 3, 2)$; $R(3, 5, -2)$

٩١- احسب زوايا المثلث ABC حيث :

$A(1, 2)$; $B(1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$; $C(1 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$

٩٢- oxyz جملة محاور احداثية مائلة ، الزاوية بين كل محورين منها تساوي $\frac{\pi}{3}$. أوجد الزاوية بين المستقيمين اللذين أمثالها الموجهة في جملة المحاور المذكورة هي :

$(3, 4, 5)$; $(2, 3, 4)$ (١)

$(1, -2, 1)$; $(2, 3, 4)$ (٢)

٩٣– برهن أن المثلث الذي رؤوسه $A(-5, 3); B(4, 0); C(6, 6)$ قائم الزاوية في B . جد احداثيي D ، الرأس الرابـــع من المستطيل ABCD .

٩٤– أوجد معادلة المنحني :

$$x y - 3 x + 2 y - 12 = 0$$

عندما نسحب مبدأ الاحداثيات إلى النقطة $(-2, 3)$.

٩٥ - اسحب المحاور كي تأخذ المعادلة :

$$2 x^2 + 3 y^2 - 10 x + 18 y + 26 = 0$$

أبسط شكل لها .

٩٦ - أوجد المعادلة الجديدة في كل من المنحنيات التالية بعد أن ندور المحاور بالزاوية المعطاة بجانب كل منحن :

(١) $x y = 1$ $\Theta = 45^\circ$

(٢) $x^2 + y^2 = a^2$ $\Theta = 45^\circ$

(٣) $\sqrt{3} x - y = 4$ $\Theta = 60^\circ$

(٤) $x^2 + xy + y^2 = 1$ $\Theta = 45^\circ$

٩٧– أوجد الزاوية التي يجب أن تدورها جملة المحاور كي يختفي الحد الذي يحوي XY في المعادلة بعد الدوران :

(١) $x^2 - x y + 5 = 0$

(٢) $x^2 + 3 x y - x + y = 0$

اختزل المعادلات الآتية إلى أبسط شكل لها بانسحاب ودوران ملائمين .

٩٨ — $3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}\,y - 16 = 0$

٩٩ — $7x^2 + 48xy - 7y^2 - 150x - 50y + 100 = 0$

١٠٠ — $x^2 - xy + y^2 - 5x + y - 2 = 0$

١٠١ — $x^2 + 3xy - 2y^2 - 7x - 2y + 16 = 0$

١٠٢ — $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y - 3 = 0$

١٠٣ — $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x \quad 18y + 9 = 0$

١٠٤ — $6xy + 8y^2 \quad 12x - 26y + 11 = 0$

١٠٥ — $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$

١٠٦ — لدينا السطح الممثل ، في جملة المحاور الاحداثية القائمة ،بالعادلة:

$$2x^2 + 6y^2 + 2y^2 + 8xz - 4x \quad 8y + 3 = 0$$

اوجد معادلة هذا السطح إذا سحبنا المحاور الاحـــداثية إلى مركز السطح .

١٠٧ — أعد المسألة السابقة نفسها من أجل السطح :

$$4xy + 4xz - 4y - 4z - 1 = 0$$

١٠٨ — لدينا المعادلة :

$$x^2 + 4(y^2 + z^2) = 2$$

المنسوبة إلى جملة محاور احداثية قائمة . لنستبدل هـــذه الجملة بجملة أخرى مائلة ، متحدة مع الأولى بالمبدأ ، واما محاورها فمعينة بالأمثـــال الموجهة :

$$(2, 1, 1) ; (4, \sqrt{3} - 1, \sqrt{3} + 1) ; (4, -\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1)$$

برهن أن المعادلة الجديدة هي :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

الاجوبة

٩٠- $\arc\cos\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\arc\cos\frac{\sqrt{6}}{3}$; 90°

٩١- $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$

٩٢- (1) $\arc\cos\frac{22}{7\sqrt{10}}$ (2) $\frac{\pi}{2}$

٩٣- $(-3 , 9)$

٩٤- $XY = 6$

٩٥- المبدأ الجديد $(-3 , \frac{5}{2})$ ، المعادلة بعد سحب المحاور
$4X^2 + 6Y^2 = 27$.

٩٦- (١) $X^2 - Y^2 = 2$

(٢) $X^2 + Y^2 = a^2$

(٣) $Y = -2$

(٤) $3X^2 + Y^2 = 2$

٩٧- (١) $67\frac{1}{2}$

(٢) $\frac{1}{2}\arc\operatorname{tg} 3$

٩٨- $2X^2 = Y$

٩٩- $X^2 - Y^2 = 4$

١٠٠- $X^2 + 3Y^2 = 18$

١٠١- $(3\sqrt{2} - 1)X^2 - (3\sqrt{2} + 1)Y^2 = -18$

١٠٢- $2Y^2 = 7$

١٠٣- $X^2 + 9Y^2 = 9$

١٠٤- $9X^2 - 4Y^2 = 9$

١٠٥- $Y^2 = 2X$

١٠٦- $2X^2 + 6Y^2 + 2Z^2 + 8XZ + 1 = 0$

١٠٧ $4XY + 4XZ = 1$

* * *

الفصل الثالث

المستقيم في المستوي وتطبيقاته

١ – كل معادلة من الدرجة الاولى في متحولين x و y تمثل في المستوي المنسوب الى مجموعة المحورين المتعامـــدين xoy مستقيماً ، وبالعكس كل مستقيم في المستوي يمثل بمعادلة من الدرجة الأولى في متحولين .

٢ – ان المعادلة الشعاعية لمستقيم مار من نقطـــة $M_o(x_o , y_o)$ وموازٍ لشعاع مفروض $\vec{V}(a , b)$ هي :

$$M_o\vec{M} = \varrho \vec{V}$$

حيث ϱ عدد جبري يأخذ كل القيم الممكنة .

والمعادلتان الوسيطيتان لهذا المستقيم هما :

$$x = x_o + a\varrho$$
$$y = y_o + b\varrho$$

ولو حذفنا الوسيط ϱ لحصلنا على المعادلة الديكارتية .

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b}$$

ان ميل هذا المستقيم يساوي $\frac{b}{a}$

٣ – ان المعادلة الشعاعية لمستقيم مـــار من النقطتين $M_1(x_1 , y_1)$ و $M_2(x_2 , y_2)$ هي :

$$\overrightarrow{M_1 M} = \varrho \, \overrightarrow{M_1 M_2}$$

والمعادلتان الوسيطيتان هما :

$$x = x_1 + \varrho \, (x_2 - x_1)$$
$$y = y_1 + \varrho \, (y_2 - y_1)$$

وبحذف الوسيط ϱ نحصل على المعادلة الديكارتية :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

التي يمكن كتابتها بالشكل :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ان ميل هذا المستقيم يساوي :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

يمكن كتابة المعادلتين الوسيطيتين للمستقيم المار بنقطتين بالشكل :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \; ; \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

بفرض أن $\lambda \neq - 1$.

٤ - ان المعادلة الشعاعية لمستقيم مار بالنقطة $M_o (x_o , y_o)$ وعمودي على الشعاع $\vec{V} (a , b)$ هي :

$$\overrightarrow{M_o M} \cdot \vec{V} = 0$$

والمعادلة الديكارتية هي :

$$(x - x_o) a + (y - y_o) b = 0$$

ان ميل هذا المستقيم يساوي $\frac{-a}{b}$

٥ — يتعين المستقيم كذلك بالشكل التالي : نأخذ محوراً Δ عمودياً على المستقيم فيقطعه في نقطة P . إن المستقيم المفروض يتعين بالزاوية ω التي يصنعها المحور Δ مع المحور ox وبفاصلة P على المحور Δ ولتكن p . وتكون معادلة المستقيم .

$$x \cos \omega + y \sin \omega - p = o \qquad (1)$$

ان هذا الشكل يدعى بالشكل الناظمي لمعادلة المستقيم .

٦ — نحصل على المعادلة القطبية لمستقيم بتبديل كل x بـ $\varrho \cos \varphi$ وكل y بـ $\varrho \sin \varphi$ في المعادلة الناظمة للمستقيم (1) فنجد :

$$\varrho = \frac{p}{\cos \ (\varphi - \omega)}$$

٧ — بعد نقطة $M(x_1 , y_1)$ عن مستقيم معطى بمعادلته الناظمة (1) يعطي بالدستور :

$$d = |x_1 \cos \omega + y_1 \sin \omega - p|$$

اما اذا اعطي المستقيم بمعادلته العامة .

$$A x + B y + c = o$$

فعندئذ يعطي بعد النقطة $M(x_1 , y_1)$ عن هذا المستقيم بالدستور .

$$d = \frac{|A x_1 + B y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

٨ — ان زاوية المستقيمين المبينين بالمعادلتين .

$$y = m \ x + h$$

$$y = m' x + h'$$

ولنرمز لها بـ v تعطي بالعلاقة :

$$\operatorname{tg} v = \frac{|m - m'|}{1 + m m'}$$

يتعامد المستقيمان إذا كان $m\,m' = -1$.

٩ – يتقاطع المستقيمان :

$$A\,x + B\,y + C = 0$$
$$A'\,x + B'\,y + C' = 0$$

اذا كان :

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$

ويتوازيان إذا كان :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

ويتطابقان إذا كان :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

١٠ – ان المستقيم :

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

يقسم المستوي الى نصفين يكون من اجل نقط أحدهما :

$$A\,x + B\,y + C > 0$$

ومن اجل نقط الآخر :

$$A\,x + B\,y + C < 0$$

١١ – منصفا الزاوية الحادثة من تقاطع المستقيمين :

$$A_1\,x + B_1\,y + C_1 = 0$$
$$A_2\,x + B_2\,y + C_2 = 0$$

يتعينان بالمعادلتين :

$$\frac{A_1\,x + B_1\,y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\,\frac{A_2\,x + B_2\,y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

١٢ – اذا كان لدينا المستقيمان :

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \qquad (2)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \qquad (3)$$

فان المستقيات :

$$(A_1 x + B_1 y + C_1) + \lambda (A_2 x + B_2 y + C_2) = 0 \qquad (4)$$

حيث λ وسيط متحول تشكل حزمة مستقيات خطية .

المستقيان (2) و (3) يسميان مستقيمي القاعدة .

فاذا كان مستقيما القاعدة متقاطعين فعندئذ تمثل (4) كل المستقيات المــارة بنقطة التقاطع .

وإذا كان مستقيما القاعدة متوازيين فعندئذ تمثل (4) كل المستقيات الموازية لها ، وذلك عندما تأخذ λ كل الأعداد الحقيقية باستثناء القيمة $\lambda = -\frac{A_1}{A_2}$

وإذا كان مستقيما القاعدة منطبقين فعندئذ تمثل (4) نفس المستقيم .

١٣ – الشرط اللازم والكافي كي تؤلف المستقيات :

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

$$A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$$

حزمة خطية هو ان يتحقق الشرط :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

١٤ – حتى تقع النقط الثلاث (x_1 , y_1) ، (x_2 , y_2) ، (x_3 , y_3) على استقامة واحدة يلزم ان يكون :

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3 = 0$$

أو بشكل آخر :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = o$$

١٥ – كذلك ان الشكل العام لمعادلة المستقيم في مجموعة محاور احداثيـــة مائلة هو :

$$a\,x + by + c = o$$

مسائل وتمارين محلولة

١٠٩– إذا علمت ان منتصفات أضلاع مثلث هي :

$A(1, 2)$ $B(7, 4)$ $C(3, -4)$

فاكتب معادلات أضلاعه :

الحــل :

لنفرض أن رؤوس المثلث تقع في النقط

$A(x_1, y_1)$; $B'(x_2, y_2)$; $C'(x_3, y_3)$

فعندئذ يكون :

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 3 \quad ; \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = -4$$

$$\frac{x_1 + x_3}{2} = 7 \quad ; \quad \frac{y_1 + y_3}{2} = 4$$

$$\frac{x_2 + x_3}{2} = 1 \quad ; \quad \frac{y_2 + y_3}{2} = 2$$

وبحل جملة المعادلات هذه نجد :

$$x_1 = 9 \; ; \quad x_2 = -3 \; ; \quad x_3 = 5$$

$$y_1 = -2 \; ; \quad y_2 = -6 \; ; \quad y_3 = 10$$

وتكون معادلة الضلع $A'B'$:

$$\frac{x+3}{12} = \frac{y+6}{4}$$

أو :

$$x - 3y = 15$$

بالطريقة نفسها نجد معادلتي الضلعين $A'C'$ و $B'C'$:

$$y + 3x = 25$$

$$2x - y = 0$$

١١٠ــ اكتب المعادلة الديكارتية للمستقيم الذي يصل بين $A(1, 2)$ و $B(10, 8)$ ثم اكتب معادلتين وسيطيتين له . عين بعد ذلك معادلة العمود النازل من $C(11, 0)$ على AB ، وإحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين .

الحل :

نعلم ان المعادلة الديكارتية للمستقيم المار بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) هي :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

فالمعادلة الديكارتية المطلوبة :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 10 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المعين وفق عناصر السطر الأول نجد :

$$x(2-8) - y(1-10) + 1(8-20) = 0$$

أو :

$$-6x + 9y - 12 = 0$$

وبالاختصار على (3) نحصل :

$$-2x + 3y - 4 = 0 \qquad (1)$$

ويمكن الحصول على تمثيل وسيطي للمستقيم بالتعويض في الدستورين :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad ; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

فنجد :

$$x = \frac{1 + 10\lambda}{1 + \lambda} \quad ; \quad y = \frac{2 + 8\lambda}{1 + \lambda}$$

إن الأمثال الموجهة للعمود على المستقيم AB هي أمثال x و y في معادلة هذا المستقيم (1) ، أي (3 , 2 -) فمعادلة العمود المطلوب هي :

$$\frac{x - 11}{-2} = \frac{y - 0}{3}$$

أو :

$$3x + 2y - 33 = 0 \qquad (2)$$

وبحل المعادلتين (1 و 2) نحصل على نقطة التقاطع (6 , 7) .

١١١ — اكتب معادلة العمود في منتصف القطعة AB حيث :

$B(4, -3)$ ، $A(2, 1)$

الحـل :

إن احداثيي منتصف AB هما :

$$x = \frac{4 + 2}{2} = 3 \quad ; \quad y = \frac{-3 + 1}{2} = -1$$

والامثال الموجهة للمستقيم AB هي :

$$a = 4 - 2 = 2 \; ; \qquad b = -3 - 1 = -4$$

وبهذا تؤول المسألة إلى إيجاد معادلة مستقيم مار بالنقطة (1 - ، 3) وعمودي على الشعاع (4 - ، 2) :

$$2 (x - 3) - 4 (y + 1) = 0$$

أو :

$$2 x - 4 y - 10 = 0$$

وبالاختصار على 2 تأخذ هذه المعادلة الشكل :

$$x - 2 y - 5 = 0$$

١١٢ - أوجد احداثيي النقطة M' نظير (6 ، 1) M بالنسبة المستقيم:

$$2 x - 3 y + 5 = 0$$

الحـل :

لنفرض أن $M'(x', y')$ فعندئــذ يكون احداثيا منتصف MM' هما :

$$\frac{x' + 1}{2} \quad ; \quad \frac{y' + 6}{2}$$

ولكن هذا المنتصف يقع على المستقيم المفروض ، لذلك :

$$2\,\frac{x'+1}{2} - 3\,\frac{y'+6}{2} + 5 = 0$$

أو :

$$2x' - 3y' - 6 = 0 \qquad (1)$$

ومن جهة ثانية نلاحظ أن المستقيم MM' الذي أمثاله الموجهة :

$$1 - x' \quad , \quad 6 - y'$$

عمودي على المستقيم المفروض ، فهو يوازي الناظم عليه ، أي :

$$\frac{1-x'}{2} = \frac{6-y'}{-3}$$

ومنه :

$$3x' + 2y' - 15 = 0 \qquad (2)$$

وبحل المعادلتين (1) و (2) نجـــد : $y' = \frac{12}{13}$ ، $x' = \frac{57}{13}$ وهو المطلوب .

١١٣ – اكتب معادلة المستقيم Δ نظير المستقيم :

$$x + 2y - 3 = 0 \qquad (1)$$

بالنسبة للمستقيم :

$$x - 3y + 3 = 0 \qquad (2)$$

الحـل :

ان نقطة تقاطع المستقيمين (1)و(2) تقع على Δ . وبحل معادلة هذين المستقيمين نجد : $y = \frac{6}{5}$; $x = \frac{3}{5}$.

يكفي أن نعرف نقطة أخرى من المستقيم Δ كي نتمكن من كتابة

معادلته . نأخذ نقطة ما من (١) ولتكن (3 , 0) ثم نعين نظيرها ، كما فعلنا في المسألة السابقة ، فيكون هذا النظير نقطة من المستقيم Δ . لنفرض ان احداثيي النظير هما (x' ، y') فعندئذ نحصل على المعادلتين التاليتين (انظر المسألة السابقة) :

$$x' - 3y' + 9 = 0$$
$$3x' + y' \quad 9 = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد : $x' = \frac{9}{5}$; $y' = \frac{18}{5}$ وتكون معادلة المستقيم الذي يصل النقطة ($\frac{3}{5}$, $\frac{6}{5}$) بالنقطة ($\frac{9}{5}$ ، $\frac{18}{5}$) هي :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & 1 \\ \frac{9}{5} & \frac{18}{5} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

أو :

$$y = 2x$$

وهو المطلوب .

١١٤–لدينا المثلث $A(0, 0)$; $B(1, 3)$; $C(5, 1)$

١ – أوجد احداثيي نقطة التقاطع H لارتفاعات هذا المثلث .

٢ – أوجد احداثيي المركز ω للدائرة المارة من رؤوس المثلث .

٣ – إذا كانت G نقطة تقاطع الخطوط المتوسطة فبرهن أن ω , G , H تقع على استقامة واحدة وأن : $\overrightarrow{GH} = -2\,\overrightarrow{G\omega}$

الحـــل :

(١) ان الأمثال الموجهة للمستقيم BC هي :

$$a = 5 - 1 = 4 \quad , \quad b = 1 - 3 = -2$$

وبما أن الارتفاع النــازل من A عمودي على BC فمعادلة هــــذا الارتفاع هي :

$$4(x - 0) - 2(y - 0) = 0$$

أو :

$$2x - y = 0 \qquad (1)$$

بطريقة مماثلة نجد معادلة الارتفاع النازل من C على AB :

$$x + 3y - 8 = 0 \qquad (2)$$

وبحل المعادلتين (1) و (2) نجد :

$$H\left(\frac{8}{7}, \frac{16}{7}\right)$$

(٢) ان المركز ω هو نقطة تلاقي محور القطعة AC مع محور القطعة AB . ولكن احداثيي منتصف AC هما $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ والأمثال الموجهة لـ AC هي (1 ، 5) فمعادلة محور القطعة AC هي :

$$5\left(x - \frac{5}{2}\right) + 1\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0$$

أو :

$$5x + y - 13 = 0 \qquad (3)$$

بطريقة مماثلة نجد معادلة محور القطعة AB :

$$x + 3y - 5 = 0 \qquad (4)$$

بحل المعادلتين (1) و (2) نجد :

$$\omega\left(\frac{17}{7}, \frac{6}{7}\right)$$

(٣) ان نقطة تقاطع الخطوط المتوسطة هي مركز ثقل المثلث . وإذا كانت (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و (x_3, y_3) احداثيات رؤوس المثلث ، فاحداثيا مركز ثقله هما :

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad ; \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

ومنه نجد احداثيي G :

$$x = 2 \quad , \quad y = \frac{4}{3}$$

وكي تقع النقط الثلاث على استقامة واحدة يلزم أن يكون :

$$\begin{vmatrix} \frac{8}{7} & \frac{16}{7} & 1 \\ \frac{17}{7} & \frac{6}{7} & 1 \\ 2 & \frac{4}{3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المعين وفق عناصر السطر الثالث نجد :

$$2\left(\frac{16}{7} - \frac{6}{7}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{8}{7} - \frac{17}{7}\right) + 1\left(\frac{48}{49} - \frac{272}{49}\right) = 0$$

أو

$$\frac{20}{7} + \frac{36}{21} - \frac{32}{7} = 0$$

وهذا صحيح :

ثم ان مركبتي $\overrightarrow{GH}$ هما :

$$\frac{8}{7} - 2 = \frac{-6}{7} \quad ; \quad \frac{16}{7} - \frac{4}{3} = \frac{20}{12}$$

ومركبتا $\overrightarrow{G\omega}$ هما :

$$\frac{17}{7} - 2 = \frac{3}{7} \quad , \quad \frac{6}{7} - \frac{4}{3} = - \frac{10}{12}$$

ومنه نلاحظ :

$$\overrightarrow{GH} = -2 \overrightarrow{G\omega}$$

١١٥ - $M_1(2, 1)$ و $M_2(4 . 9)$ تمثل رأسين من رؤوس مثلث و $N(3, 4)$ تمثل نقطة تلاقي ارتفاعات هذا المثلث ، لما هي معادلات أضلاعه .

الحـل :

ان معادلة الضلع $M_1 M_2$ هي :

$$\frac{x-2}{y-1} = \frac{4-2}{9-1}$$

أو :

$$4x - y - 7 = 0$$

وحيث ان الارتفـاع النازل من M_1 على الضلع الثاني $M_3 M_2$ يمر بالنقطة N فأمثاله الموجهة تكون :

$$a_1 = 3 - 2 = 1 \qquad b_1 = 4 - 1 = 3$$

فالضلع $M_3 M_2$ يمر اذن بالنقطة M_2 ويتعامد مع الشعاع $V_1(1, 3)$ فمعادلته اذن :

$$(x \quad 4) + 3(y - 9) = 0$$

أو :

$$x + 3y - 31 = 0$$

وتكون الأمثال الموجهة للارتفاع النازل من M_2 على الضلع الثالث $M_1 M_3$ هي :

$$a_2 = 4 - 3 = 1 \qquad b_2 = 9 - 4 = 5$$

والضلع $M_1 M_3$ يمر بـ M_1 ويتعامد مع الشعاع $V_2 (1 , 5)$ فمعادلته :

$$x - 2 + 5 (y - 1) = 0$$

أو :

$$x + 5 y - 7 = 0$$

١١٦ – معادلة قاعدة مثلث متساوي الساقين هي :

$$x + y - 1 = 0$$

ومعادلة أحد الساقين هي :

$$x - 2 y - 2 = 0$$

أوجد معادلة الساق الآخر إذا علمت ان النقطة $(- 2 , 0)$ تقع على هذا الساق .

الحـل :

ان ميل القاعدة عن المحور ox هو :

$$m_1 = - 1$$

وميل الساق عن المحور ox هو :

$$m_2 = \frac{1}{2}$$

وبذلك يكون ميل الساق عن القاعد :

$$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = 3$$

وبما أن المثلث متساوي الساقين فان ميل الساق الآخر عن المحور ox وليكن m يحقق العلاقة :

$$3 = \frac{-1 - m}{1 - m}$$

ومنه نجد :

$$m = 2$$

وتكون معادلة الساق المطلوبة :

$$y = 2(x + 2)$$

أو :

$$2x - y + 4 = 0$$

١١٧ – شعاع ضوئي يمر من النقطة (2 , 3) ويسقط على المستقيم :

$$x + y + 1 = 0$$

وينعكس ماراً بالنقطة (1 , 1) . أوجد معادلة الشعاع الساقط والشعاع المنعكس .

الحل :

لنفرض ان النقطة (x_1 ، y_1) هي النقطة التي يلاقي بها كل من الشعاع الساقط والمنعكس المستقيم المفروض .

ان هذه النقطة تحقق معادلة المستقيم المفروض أي :

$$x_1 + y_1 + 1 = 0 \qquad (1)$$

وتكون معادلة الشعاع الساقط (معادلة مستقيم يمر بالنقطتين (x_1 y_1،) و (2 ، 3) هي :

$$\frac{y - 3}{x - 2} = \frac{y_1 - 3}{x_1 - 2}$$

أو بالاستفادة من (1) :

$$\frac{y-3}{x-2} = \frac{4+x_1}{2-x_1} \qquad (2)$$

وتكون معادلة الشعاع المنعكس :

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{y_1-1}{x_1-1}$$

أو بالاستفادة من : (1) :

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{2+x_1}{1-x_1} \qquad (3)$$

إلا أن ميل الشعاع الساقط عن الناظم على المستقيم المفروض يساوي ميل الناظم عن الشعاع المنعكس . وبما أن ميل الناظم هو 1 إذن :

$$\frac{\frac{4+x_1}{2-x_1} - 1}{1 + \frac{4+x_1}{2-x_1}} = \frac{1 - \frac{2+x_1}{1-x_1}}{1 + \frac{2+x_1}{1-x_1}}$$

ومنه نجد :

$$1 + x_1 = -1 - 2x_1$$

أو :

$$x_1 = -\frac{2}{3}$$

بالتعويض في (2) نحصل على معادلة الشعاع الساقط :

$$5x - 4y + 2 = 0$$

وبالتعويض في (3) نحصل على معادلة الشعاع المنعكس :

$$4x - 5y + 1 = 0$$

١١٨ – اكتب معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

$$x + 2y - 11 = 0$$

$$2x - y - 2 = 0$$

والذي يبعد عن نقطة الاصل بالمقدار 5 .

الحل :

لنشكل معادلة الحزمة من المستقيمين المفروضين وذلك بضرب المعادلة الثانية بالوسيط λ وجمعها الى الاولى :

$$(1 + 2\lambda)x + (2 - \lambda)y - (11 + 2\lambda) = 0 \qquad (١)$$

وحيث ان مستقيمي القاعدة متقاطعان فان كل مستقيمات الحزمة تمر بنقطة تقاطعها .

لنبحث عن مستقيمات الحزمة التي تبعد عن نقطة الاصل بالمقدار 5 من اجل ذلك نحسب بعد نقطة الاصل عن المستقيمات (١) فنجد :

$$\frac{|11 + 2\lambda|}{\sqrt{(1 + 2\lambda)^2 + (2 - \lambda)^2}} = 5$$

بتربيع الطرفين والاصلاح نجد :

$$121\lambda^2 - 44\lambda + 4 = 0$$

أو

$$(11\lambda - 2)^2 = 0$$

اذن المستقيم الموافق للقيمة $\lambda = \frac{2}{11}$ هو الذي يبعد عن نقطة الاصل بالمقدار 5 . لنبدل في (١) فنجد معادلة المستقيم المطلوب :

$$15x + 20y - 125 = 0$$

او

$$3x + 4y - 25 = 0$$

وحيث اننا لم نجد إلا مستقيماً واحداً يمر بالنقطة المفروضة (نقطة تقاطع المستقيمين المفروضين) ويبعد عن نقطة الاصل بالمقدار 5 ، فإن النقطة المفروضة تبعد عن نقطة الأصل 5 . لأنه لو كان بعد هذه النقطة أقل من 5 لما وجد أي مستقيم يحقق المطلوب ولو كان البعد أكبر من 5 لوجد مستقيمان .

١١٩ – ليكن لدينا المستقيم D الذي معادلته الديكارتية هي :

$$x + 3y - 14 = 0 \qquad (1)$$

اكتب معادلتي المستقيمين اللذين يشكلان مع D مثلثاً متساوي الساقين زاوية رأسه 2θ وقاعدته على D ومركز ثقله النقطة $G(1, 1)$.

الحل :

بما أن قاعدة المثلث المتساوي الساقين تقع على D فإن العمود النازل من G على D ينطبق على ارتفاع المثلث . للحصول على معادلة هذا العمود نلاحظ انه يمر من G وانه عمودي على D ، أي أن أمثاله الموجهة هي (3 ، 1) فمعادلته إذن :

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{3}$$

أو :

$$3x - y - 2 = 0 \qquad (2)$$

ان هذا المستقيم يلاقي القاعدة في منتصفها الذي نرمز له بـ H . للحصول على احداثيي هذا المنتصف نحل المعادلتين (1)و(2) فنجد $H(2, 4)$.

واذا رمزنا بـ A لرأس المثلث ، ولاحظنا أن مركز ثقل المثلث يقسم الخط المتوسط AH بالنسبة :

$$\frac{\overrightarrow{GH}}{\overrightarrow{GA}} = -\frac{1}{2}$$

فعندئذ يكون :

$$2\,\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GA} = 0$$

أو :

$$2\,(\,o\overrightarrow{H} - o\overrightarrow{G}\,) + (\,o\overrightarrow{A} - o\overrightarrow{G}\,) = 0$$

ومنه :

$$o\overrightarrow{A} = 3\,o\overrightarrow{G} - 2\,o\overrightarrow{H}$$

بالاسقاط على المحورين الاحداثيين نجد :

$$x_A = 3 - 4 = -1 \quad ; \quad y_A = 3 - 8 = -5$$

بقي ان نحسب ميل كل من ساقي المثلث . لنرمز لهذين الميلين بـ m_1 و m_2 ولنلاحظ أن الزاوية بين أحد الساقين والارتفاع تساوي Θ ، وهي نفس الزاوية بين الارتفاع والساق الآخر ، وان ميل الارتفاع يساوي 3 ، اذن :

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{m_1 - 3}{1 - 3\,m_1} \; ; \quad \operatorname{tg}\Theta = \frac{3 - m_2}{1 - 3\,m_2}$$

ومنه نجد :

$$m_1 = \frac{3 + \operatorname{tg}\Theta}{1 + 3\operatorname{tg}\Theta} \; ; \quad m_2 = \frac{3 - \operatorname{tg}\Theta}{1 - 3\operatorname{tg}\Theta}$$

فمعادلتا الساقين هما :

$$y - 4 = \frac{3 + \operatorname{tg} \Theta}{1 + 3 \operatorname{tg} \Theta} (x \quad 2)$$

$$y - 4 = \frac{3 - \operatorname{tg} \Theta}{1 - 3 \operatorname{tg} \Theta} (x - 2)$$

١٢٠ – اكتب المعادلة الناظمية لكل من المستقيمين :

$$3 x + 4 y - 5 = 0 ; \quad x + y \sqrt{3} = 6$$

الحـل :

ان طول الشعاع الناظم (4 ، 3) على المستقيم **الأول** هو $5 = \sqrt{9 + 16}$
وطول الشعاع الناظم $(1 , \sqrt{3})$ على المستقيم الثـاني هو $2 = \sqrt{1 + 3}$
ومنه بتقسيم المعادلة الأولى على 5 والثانية على 2 نحصل على المعـادلتين الناظميتين المطلوبتين :

$$\frac{3}{5} x + \frac{4}{5} y - 1 = 0 ; \quad \frac{x}{2} + \frac{y \sqrt{3}}{2} = 3$$

١٢١ – لدينـا مثلث رؤوسه النقط $A (3 , 0)$ و $B (4 , 2)$ و $C (0 , 4)$. نسقط النقطة $M (3 , 4)$ على اضلاع هـذا المثلث . برهن أن مساقط هذه النقطة واقعة على مستقيم يطلب كتابة معادلته :

الحـل :

يمكننا بسهولة أن نجد معـادلات أضلاع المثلث AB و BC و CA فنجد :

$$- 2 x + y + 6 = 0$$
$$x + 2 y - 8 = 0$$
$$4 x + 3 y - 12 = 0$$

وتكون معادلات الاعمدة النازلة من النقطة $M(3, 4)$ على هذه الأضلاع هي على الترتيب :

$$x + 2y - 11 = 0$$

$$2x - y - 2 = 0$$

$$3x - 4y + 7 = 0$$

وتكون نقاط تقاطع الأعمدة مع الاضلاع النازلة عليها هي على الترتيب :

$$\left(\frac{23}{5}, \frac{16}{5}\right) ; \left(\frac{12}{5}, \frac{14}{5}\right) ; \left(\frac{27}{25}, \frac{64}{25}\right)$$

للبرهان على أن النقط الثلاث تقع على استقامة واحدة نكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين الأولى والثانية فنجد :

$$2x - 11y + 26 = 0$$

وتقع النقط الثلاث على استقامة واحدة إذا حققت النقطة الثالثة هذه المعادلة :

$$2\left(\frac{27}{25}\right) - 11\left(\frac{64}{25}\right) + 26 = 0$$

وهذا صحيح وهو المطلوب :

١٢٢ — لدينا المستقيمان :

$$mx + (2m - 1)y + 3 = 0$$
$$(4m - 7)x - (m + 2)y - 8 = 0$$

(١) عين m لكي يتعامد المستقيمان احسب عندئذ احداثيي نقطة التقاطع .

(٢) عين m لكي يتوازى المستقيمان . احسب البعد بينهما

الحـــل :

(١) يتعامد المستقيمان عندما يكون ناظماهما متعامـدين . ولكن الأمثال الموجهة للنـــاظم على المستقيم الأول هي $(m , 2m - 1)$ ، والأمثال الموجهة للناظم على المستقيم الثاني هي : $(4m - 7 , - m - 2)$ فشرط التعامد هي :

$$m (4m - 7) + (2m - 1) (- m - 2) = 0$$

أو :

$$m^2 - 5m + 1 = 0$$

وبحل هذه المعادلة نجد :

$$m = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

للحصول على نقطة التقاطع نحل معادلتي المستقيمين المفروضين ونعوض m بقيمتها فنجد :

$$x = \frac{37 \pm 13\sqrt{21}}{141 \pm 29\sqrt{21}} \quad ; \quad y = \frac{-58 \mp 20\sqrt{21}}{141 \pm 29\sqrt{21}}$$

(٢) ويتوازى المستقيمان إذا توازى ناظماهما وهذا يتم عندما :

$$\frac{m}{4m - 7} = \frac{2m - 1}{-m - 2}$$

أي :

$$9m^2 - 16m + 7 = 0$$

وبحل هذه المعادلة نجد القيمتين :

$$m_1 = 1 ; \quad m_2 = \frac{7}{9}$$

بالتعويض في معادلتي المستقيمين نجد من أجل القيمة الأول $m_1 = 1$:

$$x + y + 3 = 0$$
$$3x + 3y + 8 = 0$$

والبعد بين المستقيمين هو بعد نقطة من احدهما عن المستقيم الآخر. فاذا اخذنا النقطة (3 - ، 0) من المستقيم الأول فإن بعدها عن المستقيم الثاني هو $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ وهو البعد المطلوب .

من اجل القيمة الثانية $m_1 = \frac{7}{9}$ تأخذ المعادلتان الشكل :

$$7x + 5y + 27 = 0$$
$$7x + 5y + \frac{72}{5} = 0$$

والبعد بين هذين المستقيمين هو $\frac{63}{5\sqrt{74}}$.

١٢٣ – اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (2 ، 1 -) وبنقطة تقاطع المستقيمين :

$$2x - 3y + 1 = 0$$
$$x + y - 4 = 0$$

الحل :

نشكل من هذين المستقمين حزمة المستقيات :

$$(2 + \lambda)x + (-3 + \lambda)y + 1 - 4\lambda = 0$$

وتمثل هذه الحزمة جميع المستقيات المارة بنقطة تقاطع المستقيمين المفروضين . لتعيين المستقيم المطلوب نحسب قيمة λ الملائمة بتعويض احداثيي النقطة المفروضة في معادلة الحزمة فنجد :

$$-(2+\lambda)+2(-3+\lambda)+1-4\lambda=0$$

ومنه نجد $\lambda=-\frac{7}{3}$ نعوض هذه القيمة في معادلة الحزمة فنجد المعادلة المطلوبة :

$$x+16y-31=0$$

١٢٤ – لدينا ثلاثة مستقيمات :

$$g_1 \equiv x-y+5=0$$
$$g_2 \equiv 2x-3y+5=0$$
$$g_3 \equiv x-2y=0$$

تحقق بالاستعانة بأمثال المعادلات ان هذه المستقيمات الثلاثة تلتقي في نقطة واحدة .

الحل :

لنبرهن أولاً ان هذه المستقيمات الثلاثة تنتمي لحزمة واحدة . من أجل ذلك يكفي ان نبرهن ان معين الأمثال معدوم :

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

وبنشر المعين نجد :

$$\Delta=10-5-5=0$$

وحيث ان المستقيمات ليست متوازية فهي متلاقية في نقطة واحدة

١٢٥– عين معادلة المنصف للزاوية الحادثة بين المستقيمين :

$$4x+7y-3=0$$
$$8x-y+6=0$$

والتي تقع فيها نقطة الأصل .

الحـــل :

ان منصفي الزاوية الحادثة من تقاطع المستقيمين المذكورين يتعينان بالمعادلتين :

$$\frac{4x+7y-3}{\sqrt{16+49}} = \pm \frac{8x-y+6}{\sqrt{64+1}}$$

أو :

$$(4x+7y-3) = \pm(8x-y+6)$$

ومنه تكون معادلة المنصف الأول :

$$4x-8y+9=0$$

ومعادلة المنصف الثاني :

$$4x+2y+1=0$$

ولكننا نعلم أن المستقيم $4x+7y-3=0$ يقسم المستوي الى قسمين يكون من اجل نقط احدهما :

$$4x+7y-3>0$$

ومن أجل نقط الآخر :

$$4x+7y-3<0$$

وأما نقطة الأصل فهي تقع في الجانب :

$$4x+7y-3<0$$

بالنسبة للمستقيم الأول والجانب :

$$8x-y+6>0$$

بالنسبة المستقيم الثاني .

لنأخذ الآن احدى نقط المنصف الأول ولتكن :

$$x = -\frac{9}{4} \qquad y = o$$

فنجد ان هذه النقطة تقع مع نقطة الأصل في الجانب :

$$4x + 7y - 3 < o$$

بالنسبة للمستقيم الأول ، ولكن في الجانب الذي لا تقع فيه نقطة الأصل :

$$4x - y + 6 < o$$

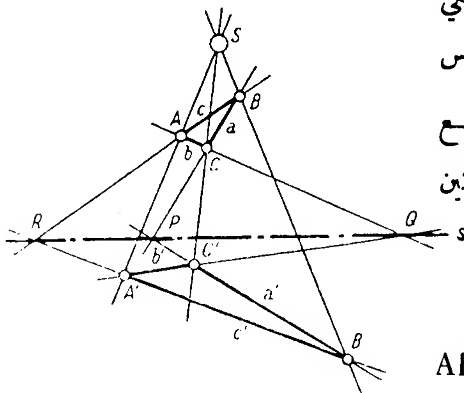
بالنسبة للمستقيم الثاني . ولذلك فالمنصف المذكور لا يقع مع نقطة الأصل في نفس الزاوية فالمنصف الثاني :

$$4x + 2y + 1 = o$$

هو المنصف المطلوب .

١٢٦– نظرية Desargues (مهندس فرنسي ١٥٩١ – ١٦٦١) .

إن الشرط اللازم والكافي لكي تتلاقى المستقيمات الواصلة بين الرؤوس المتقابلة من مثلثين هو أن تقع نقط تلاقي الاضلاع المتقابلة في المثلثين على استقامة واحدة .



شكل (٧)

الحل :

ليكن لدينا المثلثان ABC و A' B' C' كما في الشكل ، ولنرمز

للأضلاع ولمعادلاتها ، بغية السهولة ، بالحروف نفسها ؛ أي أننا نرمز الأضلاع BC و CA و AB و B′ C′ و C′A′ و A′ B′ بـ a و b و c و a′ و b′ و c′ على التعاقب ونكتب معادلاتها بالشكل :

$$a \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 = o$$
$$b \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 = o$$
$$c \equiv A_3 x + B_3 y + C_3 = o$$
$$a' \equiv A'_1 x + B'_1 y + C'_1 = o$$
$$b' \equiv A'_2 x + B'_2 y + C'_2 = o$$
$$c' \equiv A'_3 x + B'_3 y + C'_3 = o$$

١ ـ الشرط لازم : نفرض أن المستقيمات A A′ و B B′ و C C′ متلاقية بـ S ونبرهن أن نقط تلاقي الاضلاع المتقابلة P و Q و R على استقامة واحدة وهي s .

من الواضح أن المستقيم A A′ هو أحد مستقيمات الحزمة التي مستقيما قاعدتها هما الضلعان b و c وكذلك هو أحد مستقيمات الحزمة التي مستقيما قاعدتها هما الضلعان b′ و c′ ولذلك نستطيع أن نجد λ_1 و λ_2 و λ_3 و λ_4 على شكل يكون فيه :

$$\lambda_1 b + \lambda_2 c \equiv \lambda_3 b' + \lambda_4 c' \qquad (1)$$

بطريقة مماثلة نجد إذا أعدنا المناقشة من أجل كل من B B′ و CC′ :

$$\mu_1 c + \mu_2 a \equiv \mu_3 c' + \mu_4 a' \qquad (2)$$

$$\nu_1 a + \nu_2 b \equiv \nu_3 a' + \nu_4 b' \qquad (3)$$

وبما أن المستقيمات الثلاثة تنتمي لحزمة واحدة فمن الممكن أن نجد ثلاثة أعداد α و β و γ على شكل يكون فيه :

$$\alpha (\lambda_1 b + \lambda_2 c) + \beta (\mu_1 c + \mu_2 a) + \gamma (\nu_1 a + \nu_2 b) \equiv o$$

وهذه تكتب بالشكل :

$$(\beta \mu_2 + \gamma \nu_1)\, a + (\gamma \nu_2 + \alpha \lambda_1)\, b + (\beta \mu_1 + \alpha \lambda_2)\, c \equiv o$$

من هذه العلاقة نستنتج أنه اذا لم تكن جميع الأمثال معدومة فإن الأضلاع الثلاثة a و b و c تشكل حزمة وهذا يتناقض مع كونها تشكل مثلثاً لذلك :

$$\beta \mu_2 = -\gamma \nu_1 \;;\quad \gamma \nu_2 = -\alpha \lambda_1 \;;\quad \beta \mu_1 = -\alpha \lambda_2$$

وبشكل مماثل نجد :

$$\beta \mu_4 = -\gamma \nu_3 \;;\quad \gamma \nu_4 = -\alpha \lambda_3 \;;\quad \beta \mu_3 = -\alpha \lambda_4$$

بالتعويض في (1) و (2) و (3) بعد ضرب الأولى بـ α والثانية بـ β والثالثة بـ γ نجد :

$$\alpha \lambda_1 b - \beta \mu_1 c \equiv \alpha \lambda_3 b' - \beta \mu_3 c''$$

$$\beta \mu_1 c - \gamma \nu_1 a \equiv \beta \mu_3 c' - \gamma \nu_3 a'$$

$$\gamma \nu_1 a - a \lambda_1 b \equiv \gamma \nu_3 a' - \alpha \lambda_3 c'$$

ومن هذه العلاقات نستنتج أن :

$$\gamma (\nu_3 a' - \nu_1 a) \equiv \beta (\mu_3 c' - \mu_1 c) \equiv \alpha (\lambda_3 b' - \lambda_1 b)$$

وبما أن النقطة P تجعل من الطرف الأيسر يساوي الصفر والنقطة R تجعل الطرف الأوسط يساوي الصفر والنقطة Q تجعل الطرف الأيمن يساوي الصفر ، فالنقط الثلاث تقع على استقامة واحدة .

٢ ـ **الشرط كاف :** نفرض أن P و Q و R على استقامة واحدة ونبرهن أن A A′ و B B′ و C C′ تتلاقى في نقطة واحدة S .

إن المستقيم s ينتمي للحزمة المكونة من a و a′ وللحزمة المكونة من b و b′ وللحزمة المكونة من c و c′ لذلك نستطيع أن نجد λ و λ′ و μ و μ′ و ν و ν′ على شكل يكون فيه :

$$\lambda a + \lambda' a' \equiv \mu b + \mu' b' \equiv \nu c + \nu' c'$$

ومنه نجد :

$$\lambda a - \mu b \equiv - \lambda' a' + \mu' b'$$
$$\mu b - \gamma c \equiv - \mu' b' + \gamma' c'$$
$$\nu c - \lambda a \equiv - \nu' c' + \lambda' a'$$

إن النقطة c تجعل الطرف الأيمن من العلاقة الأولى مساويا للصفر في حين تجعل النقطة C′ الطرف الأيسر مساوياً للصفر لذلك فإن معادلة المستقيم C C′ هي :

$$\lambda a - \mu b = o$$

بطريقة مماثلة نجد أن معادلة BB′ هي :

$$\nu c - \lambda\ a = o$$

ومعادلة AA′ هي :

$$\mu b - \nu c = o$$

ولكننا نلاحظ بسهولة أن :

$$(\lambda a - \mu b) + (\nu c - \lambda a) + (\mu b - \nu c) \equiv o$$

وهذا يعني أن المستقيات الثلاثة A A′ و B B′ و C C′ تتلاقى في نقطة واحدة وهو المطلوب .

١٢٧ — ليكن المستقيم D الممثل في الاحداثيات القائمة بالمعادلة :

$$\lambda^2 x - \lambda y + \frac{a}{2} = o$$

حيث λ وسيط متحول و a عدد ثابت . لتكن L نقطة تقاطع D مع محور العينات . برهن أن العمود المقام على D من النقطة L يمر من نقطة ثابتة P مهما كانت λ . ليكن AX و AY المستقيمين D الموافقين للقيمتين m_1 و m_2 للوسيط λ ثم Q و R نقطتي تقاطع مستقيم ما D مع AX و AY . برهن ان الزاوية (PR ، PQ) ثابتة .

احسب بدلالة λ سطح المثلث AQR نأخذ من المستقيمات D تلك التي تقابل جذور المعادلة .

$$\lambda^3 - 3\lambda + k(1 - 3\lambda^2) = o$$

برهن انها تشكل ، بوجه عام ، مثلثاً متساوي الاضلاع . اوجد المحل الهندسي لرؤوس المثلث عندما يتحول k .

الحل :

من اجل حساب احداثيات L نبدل في معادلة المستقيم D كل x بصفر فنجد :

$$L\left(o , \frac{a}{2\lambda}\right)$$

وبما ان امثال توجيه العمودي على D هي :

$$(\lambda^2 , -\lambda)$$

فان معادلة العمود المقام على D من النقطة L هي :

$$\frac{Y - \frac{a}{2\lambda}}{-\lambda} = \frac{X - o}{\lambda^2}$$

او :

$$\lambda Y + X = \frac{a}{2}$$

من هذه المعادلة نرى ان هذا العمودي يمر بالنقطة الثانية $P\left(\frac{a}{2}, o\right)$ مهما كانت قيمة λ .

إن معدلة المستقيم AX هي :

$$m_1^2 x - m_1 y + \frac{a}{2} = o$$

ومعادلة المستقيم AY هي :

$$m_2^2 x - m_2 y + \frac{a}{2} = o$$

لتكن Q نقطة تقاطع المستقيم المتحول D مع AX . ان احداثيي هذه النقطة تتعينان بالمعادلتين :

$$\lambda^2 x - \lambda y + \frac{a}{2} = o$$

$$m_1^2 x - m_1 y + \frac{a}{2} = o$$

بحل هاتين المعادلتين نجد :

$$x = \frac{a}{2\lambda m_1} \qquad y = \frac{a(\lambda + m_1)}{2\lambda m_1}$$

بطريقة مماثلة نجد احداثيات النقطة R ، نقطة تقاطع D مع AY

$$x = \frac{a}{2\lambda m_2} \qquad y = \frac{a(\lambda + m_2)}{2\lambda m_2}$$

ويكون ميل المستقيم PQ هو :

$$\frac{\lambda + m_1}{1 - \lambda m_1}$$

وميل المستقيم PR هو :

$$\frac{\lambda + m_2}{1 - \lambda m_2}$$

ويكون ظل الزاوية (PQ ، PR) هو :

$$\frac{\frac{\lambda + m_2}{1 - \lambda m_2} - \frac{\lambda + m_1}{1 - \lambda m_1}}{1 + \frac{(\lambda + m_2)(\lambda + m_1)}{(1 - \lambda m_1)(1 - \lambda m_2)}} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

وحيث أن ظل الزاوية المذكورة لاعلاقة له بالوسيط المتحول λ فالزاوية ثابتة .

هذا ويمكن البرهان على ان الزاوية (PQ ، PR) ثابتة بشكل آخر.

لما كانت مساقط النقطة P على المستقيات D ، AY ، AX واقعة على استقامة ثابتة وهي المحور oy فان النقطة P تقع على الدائرة المارة برؤوس المثلث AQR ولذلك فإن الزاوية المفروضة تكمل أو تساوي الزاوية الثابتة (AX ، AY) .

لحساب سطح المثلث AQR نعلم أن احداثيات النقطة Q هي :

$$\left(\frac{a}{2\lambda m_1} \quad , \quad \frac{a(\lambda + m_1)}{2\lambda m_1} \right)$$

واحداثيات النقطة R هي :

$$\left(\frac{a}{2\lambda m_2} \quad , \quad \frac{a(\lambda + m_2)}{2\lambda m_2} \right)$$

بالطريقة نفسها نجد احداثيات النقطة A من تقاطع المستقيمين AX
AY فنجد :

$$\left(\frac{a}{2 m_1 m_2} \quad ، \quad \frac{a(m_1 + m_2)}{2 m_1 m_2} \right)$$

ويكون لذلك مركبتا AR هما :

$$\left[\frac{a(m_1 - \lambda)}{2\lambda m_1 m_2} \quad , \quad \frac{a(m_1 - \lambda)}{2\lambda m_1} \right]$$

ومركبتا AQ هما :

$$\left[\frac{a(m_2 - \lambda)}{2\lambda m_1 m_2} \quad , \quad \frac{a(m_2 - \lambda)}{2\lambda m_2} \right]$$

ولكن سطح المثلث AQR يعطى بنصف طول الجـــداء الهندسي
للشعاعين AR و AQ لذلك فان :

$$s = \frac{1}{2} \left| \left[\frac{a(m_1 - \lambda)}{2\lambda m_1 m_2} \cdot \frac{a(m_2 - \lambda)}{2\lambda m_2} - \frac{a(m_1 - \lambda)}{2\lambda m_1} \cdot \frac{a(m_2 - \lambda)}{2\lambda m_1 m_2} \right] \right|$$

ومنه :

$$s = \left| \frac{a^2 (m_1 - m_2)(m_1 - \lambda)(m_2 - \lambda)}{8 \lambda^2 m_1^2 m_2^2} \right| .$$

لننتقل بعد ذلك إلى برهان أن المستقيمات التي تقابل جذور المعادلة :

$$(1) \qquad \lambda^3 - 3\lambda + k(1 - 3\lambda^2) = 0$$

تشكل مثلثاً متساوي الاضلاع .

من اجل ذلك لنفرض ان جذور المعـــادلة (١) هي α ، β ، φ فعندئذ يكون :

$$(2) \qquad \alpha + \beta + \gamma = 3k$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3$$

$$\alpha\beta\gamma = -k$$

فاذا لاحظنا ان ميل المستقيم D هو λ فعندئذ تكون α ، β ، γ عبارة عن ميول اضلاع المثلث المذكور .

وحتى يكون هذا المثلث متساوي الساقين يلزم ان يكون ميـــل احد الاضلاع (وليكن ذلك الذي ميله α) عن ضلع ثان (وليكن ذلك الذي ميله β) يساوي ميل هذا الضلع عن الضلع الثالث (الذي ميله γ) إذن :

$$\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha \beta} = \frac{\beta - \gamma}{1 + \beta \gamma}$$

وباصلاح هذه العلاقة يمكن كتابتها على الشكل :

$$3\,\alpha \beta \gamma + (\alpha + \beta + \gamma) = \beta\,(3 + \alpha \beta + \beta \gamma + \gamma \alpha)$$

ولكن استناداً الى العلاقات (2) نرى تحقق هذه العلاقة . فالمثلث المذكور متساوي الساقين قاعدته الضلع الذي ميله β . وبطريقـة مماثلة يمكن برهان أن المثلث متساوي الساقين قاعدتـــه الضلع الذي ميله α فالمثلث متساوي اضلاع .

لننتقل اخيراً لايجاد معادلة المحل الهندسي لرؤوس المثلث عندمـــا يتحول k . من أجل ذلك لنحسب احداثيات أحـــد الرؤوس وليكن ذلك الذي ينتج عن تقاطع المستقيمين الموافقين للقيمتين α و β :

$$\alpha^2 x \quad \alpha y + \frac{a}{2} = 0$$

$$\beta^2 x - \beta y + \frac{a}{2} = 0$$

بحل هاتين المعادلتين نجد :

$$x = \frac{a}{2\,\alpha \beta} \qquad y = \frac{a\,(\alpha + \beta)}{2\,\alpha \beta}$$

واستناداً إلى العلاقات (2) نجد :

$$(3) \qquad x = - \frac{-a \gamma}{2\,k} \qquad y = \frac{-a \gamma\,(3\,k - \gamma)}{2\,k}$$

ولما كانت γ احدى جذور المعادلة (١) فان :

$$k = \frac{3\gamma - \gamma^3}{1 - 3\gamma^2}$$

لنبدل في (3) فنجد :

$$x = \frac{a(3\gamma^2 - 1)}{2(3 - \gamma^2)} \qquad y = \frac{4a\gamma}{\gamma - 3}$$

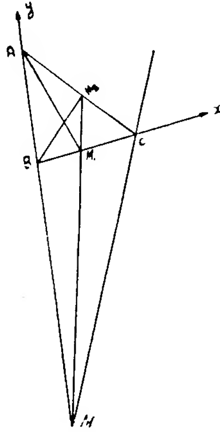
وبحذف الوسيط γ بين هاتين المعادلتين نجد :

$$4y^2 - 12x^2 - 20ax \quad 3a^2 = o$$

وبسهولة نستطيع التأكد أن الرأسين الآخرين يرسمان المنحني نفسه .

١٢٨ – ليكن لدينا المثلث ABC . ولتكن M_1 نقطة تقاطع المنصف الداخلي لـ A مع الضلع المقابل BC و M_2 نقطة تقاطع المنصف الداخلي لـ B مع الضلع المقابل AC و M_3 نقطة تقاطع المنصف الخارجي لـ C مع امتداد الضلع المقابل AB .

برهن أن النقط الثلاث تقع على استقامة واحدة .



شكل(٨)

الحـل :

لنتخذ B مبدأ لمجموعة محاور مائلة ينطبق فيها المحوران على BC و AB .

فإذا كانت أطوال أضلاع المثلث AB و BC و CA على التوالي c و a و b فعندئذ تكون معادلة الضلع AC هي .

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{c} = 1 \qquad (1)$$

واما معادلة المنصف BM_2 فهي :

$$x = y \qquad (2)$$

واحداثيا النقطة M_2 نحصل عليها بحل المعادلتين (1) و (2) فنجد

$$M_2 \left(\frac{ac}{a+c} \quad , \quad \frac{ac}{a+c} \right)$$

ولحساب أحداثيي النقطة M_1 نلاحظ حسب نظريات المنصف الداخلي في مثلث :

$$\frac{BM_1}{M_1C} = \frac{c}{b}$$

ومنه باضافة الصور إلى المخارج نجد :

$$\frac{BM_1}{a} = \frac{c}{b+c}$$

وحيث ان النقطة M_1 تقع على المحور Bx فإن احداثيها هما :

$$M_1 \left(\frac{ac}{b+c} \cdot o \right)$$

بنفس الطريقة نجد احداثيات النقطة M_3 :

$$M_3 \left(o \text{ ، } \frac{ac}{a-b} \right)$$

واما معادلة المستقيم الذي يصل النقطة M_1 بالنقطة M_3 فهي :

$$\frac{x}{\frac{ac}{b+c}} + \frac{y}{\frac{ac}{a-b}} = 1$$

أو :
$$(b+c)x+(a-b)y=ac$$

ولكن النقطة M_2 تقع على هذا المستقيم لأنه بتبديل احداثياتها في هذه المعادلة نجد :

$$\frac{(b+c)ac}{a+c}+\frac{(a-b)ac}{a+c}=ac$$

أو :
$$(b+c)+(a-b)=(a+c)$$

وهو المطلوب .

١٢٩ – عين الزاوية المحصورة بين المستقمين الممثلين بالمعادلة :

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=o$$

اوجد الشرط الذي من اجله يتعامد هذان المستقيان .

اكتب معادلة منصفات الزاوية الحادثة بين المستقيمين .

الحـل :

ان المعادلة المذكورة تمثل معادلة مستقيمين مارين بالمبدأ ، وذلـــك لأنه يمكن بوجه عام تحليل الطرف الايسر الى جداء عاملين من الدرجة الاولى في x و y .

ولما كانت معادلة المستقيم المار بالمبدأ من الشكل :

$$\frac{y}{x}=m$$

فان ميلي المستقيمين المفروضين يعطى بالعلاقة :

$$A+2Bm+Cm^2=o$$

من هذه العلاقة نرى ، إذا كان m_1 و m_2 جذري هذه المعادلة فإن :

$$m_1 + m_2 = -\frac{2B}{C}$$

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{A}{C} \qquad (1)$$

$$m_1 - m_2 = \frac{\pm 2\sqrt{B^2 - AC}}{C}$$

ولما كان مماس الزاوية V المحصورة بـــين مستقيمين ميلهما m_1 و m_2 تعطى بالعلاقة :

$$tg\, V = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

لذلك يكون :

$$tg\, V = \frac{\pm 2\sqrt{B^2 - AC}}{A + C}$$

وحتى يتعامد المستقيمان المفروضان يلزم ان يكون $V = \frac{\pi}{2}$ وهــذا يتم إذا كان :

$$A + C = O$$

لنفرض اخيراً m' ميل المنصف للزاوية الحادثـة بـين المستقيمين ، وعندئذ يلزم أن يكون ظل الزاوية المحصورة بـــين المنصف وأحـــد المستقيمين يساوي ظل الزاوية المحصورة بين المستقيم الآخر وهذا المنصف .
لذلك يلزم :

$$\frac{m_1 - m'}{1 + m_1 m'} = \frac{m' - m_2}{1 + m' m_2}$$

وباصلاح هذه العلاقة نجد :

$$(m_1 + m_2) m'^2 + 2 (1 - m_1 m_2) m' - (m_1 + m_2) = 0$$

وبما ان المنصفات تمر بالمبدأ ، أي أن معادلتها من الشكل :

$$\frac{y}{x} = m'$$

واستناداً إلى العلاقات (١) نجد :

$$\frac{-2B}{C} \frac{y^2}{x^2} + 2 (1 - \frac{A}{C}) \frac{y}{x} + \frac{2B}{C} = 0$$

ومنه :

$$B (y^2 - x^2) + (A - C) x y = 0$$

وهي معادلة المنصفات المطلوبة

١٣٠ - برهن أن المعادلة :

$$\frac{b}{r} + \cos \Theta = \cos (\Theta - \alpha)$$

تمثل مستقيما . أوجد بعده عن القطب

اوجد نقط تقاطع المستقيم المذكور مع المستقيم .

$$\frac{b}{r} + \cos \Theta = \cos (\Theta - \beta)$$

الحـل :

من معادلة المستقيم الأول نجد :

$$\frac{b}{r} = \cos (\Theta - \alpha) - \cos \Theta = 2 \sin (\Theta - \frac{\alpha}{2}) \sin \frac{\alpha}{2}$$

ومنه :

$$r = \frac{\dfrac{b}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}}{\cos(\Theta - \frac{\alpha + \pi}{2})}$$

وهذه هي المعادلة القطبية للمستقيم الذي يبعد عن القطب بالمقدار :

$$\frac{b}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

وتقاطع المستقيمين يعني اشتراكهما بنقطة . فاذا افترضنا ان الاحداثيات القطبية لنقطة التقاطع هي r_1 ، Θ_1 فعندئذ يكون :

$$\frac{b}{r_1} + \cos \Theta_1 = \cos (\Theta_1 - \alpha) \qquad (1)$$

$$\frac{b}{r_1} + \cos \Theta_1 = \cos (\Theta_1 - \beta)$$

ومن هاتين المعادلتين نجد :

$$\cos (\Theta_1 - \alpha) = \cos (\Theta_1 - \beta)$$

والحل المقبول لهاتين المعادلتين هو :

$$\Theta_1 - \alpha = - \Theta_1 + \beta$$

ومنه :

$$\Theta_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

وبالتبديل باحدى المعادلتين (١) نجد :

$$r_1 = \frac{b}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}$$

مسائل وتمارين غير محلولة

١٣١ — النقط $A(-7, 1)$ و $B(-1, 3)$ و $C(-3, 5)$ هي رؤوس المثلث ABC والنقطة F هي منتصف الضلع AB والنقطة E هي منتصف الضلع AC أوجد :

(١) احداثيي كل من E و F .

(٢) معادلتي EF و BC .

(٣) معادلة العمود النازل من A على BC

١٣٢ — احسب أبعاد النقطة $A(2, 1)$ عن المستقيمات :

$$3x + 4y - 2 = 0$$
$$4x - 3y + 3 = 0$$
$$5x - 2 = 0$$

ماهو وضع النقطة A بالنسبة للمثلث المتشكل من هذه المستقيمات الثلاثة .

١٣٣ – من نقطة تقاطع المستقيمين :

$$x - y - 1 = 0$$
$$x + 2y - 2 = 0$$

ومن النقطة (1 ، 1 –) يمر مستقيم . اكتب معادلته .

١٣٤ – اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (1 ، 1 –) إذا علمت أن منتصف القطعة التي يحدها عليه المستقيمان :

$$x + 2y - 1 = 0$$
$$x + 2y - 3 = 0$$

تقع على المستقيم :

$$x - y - 1 = 0$$

١٣٥ – عين المستقيمات المارة بنقطة الاصل ، إذا علمت ان طول القطعة التي يحددها المستقيمان :

$$x - y + 1 = 0$$
$$x - y - 2 = 0$$

مع كل من المستقيمات المطلوبة يساوي 3 .

١٣٦ – النقط الثلاث (2 ، 1) ، (1 ، 1) ، (1 ، 2) تشكل رؤس مثلث .

اوجد معادلة المنصف الداخلي لهـــذا المثلث في الرأس (1 ، 1)

١٣٧ – اذا علمت أن معادلتي ساقين من اضلاع مثلث متساوي الساقين هي :

$$2x - y + 8 = 0$$

$$x - 2y - 12 = 0$$

واذا علمت ان النقطة (0 ، 4) تقع على الضلع الثـــالث فما هي معادلة هذا الضلع .

١٣٨ – تقع اضلاع مثلث على المستقيمات :

$$2x - 3y + 4 = 0$$

$$x + y + 3 = 0$$

$$5x - 4y - 20 = 0$$

أوجد معادلات ارتفاعات هذا المثلث دون أن تستعين باحـداثيات رؤوسه .

١٣٩ – المستقيم :

$$2x + y - 1 = 0$$

هو احـــد المنصفات الداخلية لمثلث والنقطتان $B(1, 2)$ ، $c(-1, -1)$ هما رأسان من رؤوس المثلث غير واقعين على المنصف المذكور . ما هي احداثيات الرأس الثالث A .

١٤٠ – لدينا المثلث ABC ، $A(1, 1)$ ، $B(5, 4)$ والمستقيم :

$$2x - y - 1 = 0$$

هو احد المنصفات الداخلية للمثلث . اوجد معادلات اضلاع المثلث إذا علمت أن سطحه يساوي 5 .

١٤١ – برهن ان مجموع ابعاد اي نقطة داخلية في مثلث متساوي الاضلاع عن اضلاع المثلث يساوي مقداراً ثابتاً

١٤٢ – ليكن لدينا حزمة المستقيمات :

$$y = m x - \frac{p(1 + m^2)}{2m}$$

p طول مفروض و m وسيط متحول . برهن انـــه يمر في كل نقطـــة $M(x_o , y_o)$ ، ضمن شرط معين ، مستقيمان من مستقيمات الحزمة . ماهو هذا الشرط . عين المحل الهندسي للنقطـــة M التي من اجلها يتعامد المستقيمان ، وكذلك المحل الهندسي للنقطة M التي من اجلها يصنع المستقيمان زاوية مفروضة V . اكتب المعادلة القطبيـة للمنحني الاخير .

١٤٣ – مستقيم يقطع الضلعين AB و CB لمثلث في النقطتين M و N وامتداد الضلع AC في النقطة P . برهن أن :

$$AM \cdot BN \cdot CP = AP \cdot BM \cdot CN$$

الاجوبة

١٣١ – (١) $F(-4, 2)$; $E(-5, 3)$

(٢) $x + y + 2 = 0$; $x + y - 2 = 0$

(٣) $x - y + 8 = 0$

١٣٢ – النقطة A تبعد عن المستقيمات الثلاثة نفس البعد $\frac{8}{5}$. ولذلك فهي ملتقى منصفات المثلث .

١٣٣ – $2x + 7y - 5 = 0$

١٣٤ – $2x + 7y = 5$

١٣٥ – $x = 0$; $y = 0$

١٣٦ - $x = y$

١٣٧ - $y = \pm(x - 4)$

١٣٨ - $27x + 18y + 46 = 0$; $7x - 7y - 16 = 0$;

$20x + 25y + 62 = 0$

١٣٩ - $A\left(-\frac{13}{5} ; \frac{31}{5}\right)$

١٤٠ - $x - 8y + 27 = 0$; $3x - 4y + 1 = 0$; $x = 1$

١٤٢ - $y_o^2 + p(2x_o - p) \geqslant 0$

$$x_o = p$$

$$x_o^2 + y_o^2 = \frac{1}{\cos^2 v}(p - x_o)^2$$

$$r = \frac{p}{\cos v + \cos \Theta}$$

الفصل الرابع

المستوي والمستقيم في الفراغ

١ – كل مستو يمثل بمعادلة من الدرجة الاولى في الاحداثيات الديكارتية x ، y ، z لنقطة منه ، وبالعكس كل معادلة من الدرجة الأولى في x و y و z تمثل مستوياً في الفراغ :

$$P \equiv a x + b y + c z + d = o \qquad (1)$$

٢ – المعادلة الشعاعية لمستو يمر بنقطة $M_o(x_o , y_o , z_o)$ ويوازي شعاعين $V_1(a_1 , b_1 , c_1)$ و $V_2(a_2 , b_2 , c_2)$.

هي :

$$(\overrightarrow{M_o M}, \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}) = o$$

أو :

$$M_o M = \varrho \overrightarrow{V_1} + \lambda \overrightarrow{V_2}$$

يسمي ϱ و λ وسيطي المستوي .

والمعادلات الوسيطية هي :

$$x = x_o + \varrho a_1 + \lambda a_2$$
$$y = y_o + \varrho b_1 + \lambda b_2$$
$$z = z + \varrho c_1 + \lambda c_2$$

والمعادلة الديكارتية هي :

$$\begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

٣ – معادلة المستوي المـــار من النقط الثلاث $M_1(x_1 , y_1 , z_1)$ و $M_2(x_2 , y_2 , z_2)$ و $M_3(x_3 , y_3 , z_3)$ هي :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

٤ – معادلة المستوي المعين بنقطتين ومنحى هي .

$$\begin{vmatrix} x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ x_1 - x_o & y_1 - y_o & z_1 - z_o \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

٥ – معادلة المستوي المار بالنقطة M_o والعمودي على المنحى المعين بالشعاع $\vec{V}$ هي :

$$\overrightarrow{M_oM} \cdot \vec{V} = 0$$

وديكارتياً :

$$a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$$

من هذه المعادلة نرى أن أمثال x و y و z في معـــادلة المستوي هي امثال توجيه الناظم على هذا المستوي .

وإذا كان $\vec{V}$ شعاع واحدة فعندئذ نحصل على المعادلة الناظمية للمستوي .

$$(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\cos\beta + (z - z_0)\cos\gamma = 0$$

α و β و γ هي الزوايا التي يصنعها الناظم على المستوي مع المحاور الاحداثية .

٦ – بعد النقطة $M_0(x_0 , y_0 , z_0)$ عن المستوي (1) هو :

$$\frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

٧ – كل مستو (1) يقسم الفراغ إلى قسمين يكون من أجل نقط احدهما $P > 0$ ويكون من اجل نقط الآخر $P < 0$.

٨ – معادلات المنصفات للزوايا الحادثة بين المستويين :

$$(2) \qquad \begin{cases} P \equiv a x + b y + c z + d = 0 \\ Q \equiv A x + B y + C z + D = 0 \end{cases}$$

هي :
$$\frac{P}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \pm \frac{Q}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

٩ – يتقاطع المستويان (2) . إذا لم يكن :

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$

ويتوازيان إذا كان .

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} \neq \frac{d}{D}$$

وينطبقان إذا كان :

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{d}{D}$$

١٠ – إذا كان لدينا المستويان (2) ، فاننا نسمي مجموعة المستويات التي معادلتها .

$$P + \lambda Q = o \qquad (3)$$

حيث λ يمثل وسيطاً متحولاً ، حزمة مستويات خطية وندعو المستويين P و Q مستويي القاعدة . فاذا كان المستويان (2) متقاطعين بفصل مشترك فان المستويات (3) جميعها تمر بهذا الفصل المشترك وإذا كان المستوين (2) متوازيين فان (3) توازيهما واذا كانا منطبقين فان جميع المستويات (3) تنطبق عليهما .

١١ – لكي تتقاطع ثلاثة مستويات في نقطة يجب ان يكون معين الامثال مخالفاً للصفر .

١٢ – المعادلة الشعاعية للمستقيم في الفراغ المار بالنقطة $M_o (x_o , y_o , z_o)$ والموازي للشعاع $\vec{V}(a , b , c)$ هي :

$$\overrightarrow{M_oM} = \varrho \vec{V}$$

والمعادلات الوسيطية هي :

$$x = x_o + a \varrho$$

$$y = y_o + b \varrho$$

$$z = z_o + c \varrho$$

والمعادلات الديكارتية هي :

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

نسمي هذا الشكل بالشكل العام لمعادلة مستقيم في الفراغ .

وإذا كان المستقيم ماراً بنقطتين مفروضتين $M_0 (x_0 , y_0 , z_0)$ و $M_1 (x_1 , y_1 , z_1)$ فعندئذ نحصل على معادلاته بتعويض a و b و c في المعادلات السابقة و $x_1 - x_0$ و $y_1 - y_0$ و $z_1 - z_0$ على الترتيب . كذلك يمكن كتابة معادلاته الوسيطية بالشكل :

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}; \qquad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}; \qquad z = \frac{z_0 + \lambda z_1}{1 + \lambda}$$

١٣ - يتعين المستقيم في الفراغ كذلك بتقاطع مستويين مثل :

$$P \equiv a x + b y + c z + d = 0$$
$$Q \equiv A x + B y + C z + D = 0$$

ان امثال توجيه هذا المستقيم هي :

$$b C - c B , \quad c A - a C , \quad a B - b A$$

١٤ - زاوية المستقيم الذي امثال توجيهه (a , b , c) مع المستوي (2) تعطى بالعلاقة :

$$\sin \Theta = \frac{| a A + b B + c C |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

١٥ بعد نقطة M_1 عن مستقيم معين بنقطة منه M_0 وبالشعاع $\vec{V}$ يعطى بالعلاقة :

$$d = \frac{| \vec{V} \wedge \overrightarrow{M_0 M_1} |}{| \vec{V} |}$$

اما إذا تعين المستقيم بمستويين متقاطعين فاننا نبحث عن مستويين متعامدين من

مستويات الحزمة المتشكلة من هذين المستويين ثم نحسب بعد النقطة عن كل من هذين المستويين ، فاذا كان d_1 و d_2 هذين البعدين فعندئذ يكون بعد النقطة المفروضة عن المستقيم معطى بالعلاقة :

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2$$

١٦ — اذا كان لدينا مستقيم معين بالنقطة M_o والشعاع $\vec{V}(a , b , c)$ فان هذا المستقيم إما أن يقطع المستوي الذي تكون الأمثال الموجهة للعمودي عليه هي (A , B , C) إذا كان :

$$aA + bB + cC \neq o$$

ويوازيه إذا كان .

$$aA + bB + cC = o \tag{4}$$

والنقطة M_o ليست من المستوى المفروض .

وينطبق عليه إذا تحقق الشرط (4) وكانت النقطة M_o من المستوي :

١٧ — اذا كان لدينا مستقيان في الفراغ ، يمر احدهما بالنقطة $M_o(x_o , y_o , z_o)$ ويوازي الشعاع $\vec{V}(a , b , c)$ ويمر الثاني بالنقطة $M_1(x_1 , y_1 , z_1)$ ويوازي الشعاع $\vec{V'}(a' , b' , c')$ فان الشرط اللازم والكافي لكي يقع هذان المستقيان في مستو واحد هو أن يكون :

$$(\overrightarrow{M_oM_1} , \vec{V} , \vec{V'}) = o \tag{5}$$

ولكي يتقاطع المستقيان يجب ان ينحقق الشرط (5) وأن يكون المستقيان غير متوازيين ، أي أن يكون $\vec{V}$ غير مواز لـ $\vec{V'}$ ، أي أن لايكون :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

مسائل وتمارين محلولة

١٤٤ — اكتب معادلة المستوي المار بالنقط الثلاث (0 , 0 , 2) ، (0 , 3 - , 0) ، (4 , 0 , 0) .

الحـل :

ان معادلة المستوي المطلوب هي (حسب ٣) :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المعين نجد :

$$-12x + 8y - 6z + 24 = 0$$

١٤٥ — اكتب معادلة المستوي المـــار بالنقطتين (1 , 1 , 1) ، (2 , 2 , 2) والعمودي على المستوي :

$$x + y - z = 0$$

الحـل :

ان الأمثال الموجهة للناظم على المستوي المفروض هي $\vec{v}(1 , 1 , -1)$ وبذلك يؤول المطلوب إلى تعيين مستو مار بنقطتين ويوازي شعاعـاً معلوماً فالمعادلة المطلوبة هي « حسب ٤ » :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المعين نجد :

$$x - y = 0$$

١٤٦ – اكتب معادلة المستوي المار بالنقطة (1 ، 1 – ، 1) والعمودي على المستويين

$$x - y + z - 1 = 0$$
$$2x + y + z + 1 = 0$$

الحل :

ان الأمثال الموجهة للناظم على المستوي الأول هي $V_1(1, -1, 1)$ والأمثال الموجهة للناظم على المستوى الثاني هي $V_2(2, 1, 1)$ ، وبذلك آلت المسألة إلى تعيين المستوي المار بالنقطة المفروضة والموازي للشعاعين $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ ، فحسب (٢) نجد :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المعين نجد :

$$-2x + y + 3z = 0$$

١٤٧ – اكتب معادلة المستوي المار بمبدأ الاحداثيات والعمودي على المستقيم الواصل بين النقطتين $A(1, 1, 0)$ و $B(0, 0, 2)$. ثم اكتب معادلة المستوي المار بالمستقيم AB والموازي للمحور ox .

الحل :

من الواضح أن الأمثال الموجهة للمستقيم AB هي :

$$a = 1 - 0 = 1 ; \quad b = 1 - 0 = 1 ; \quad c = 0 - 2 = -2$$

فمعادلة المستوي المار بمبدأ الاحداثيات والعمودي على المستقيم AB هي :

$$1(x - 0) + 1(y - 0) - 2(z - 0) = 0$$

أو :

$$x + y - 2z = 0$$

واما المستوي المار بالمستقيم AB والموازي للمحور ox فهو يمر بالنقطة A ويوازي AB أي يوازي الشعاع $(1 , 1 , -2)$ ، كما أنه يوازي محور السينات أي يوازي الشعاع $(1 , 0 , 0)$ فمعادلته هي :

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المعين وفق عناصر السطر الثالث نجد :

$$-2(y \quad 1) - 1(z - 0) = 0$$

أو :

$$2y + z - 2 = 0$$

١٤٨ – اكتب معادلة المستوي الموازي للمحور oy والمار بالمستقيم Δ الكائن في المستوي xoz والممثل في هذا المستوي بالمعادلة :

$$2x - z + 3 = 0 \qquad (1)$$

الحـل :

إن المعادلة (١) هي المعادلة المطلوبة لأنها تمثل في الفراغ مستوياً يوازي oy ويمر بالمستقيم Δ في المستوي xoz .

يمكن التأكد من الجواب بشكل آخر : إن الأمثال الموجهة للمستقيم (1) هي (2 , 0 , 1) لأنه يمكن كتابة معادلتي هذا المستقيم في الفراغ بالشكل :

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-3}{2}$$

والأمثال الموجهة للمحور oy هي (0 , 1 , 0) ، وإذا أخذنا نقطة ما من Δ ولتكن (3 , 0 , 0) فعندئذ يمر المستوي المطلوب بهذه النقطة ويوازي الشعاعين (2 , 0 , 1)و(0 , 1 , 0) فمعادلته :

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المعين وفق عناصر السطر الثالث نجد :

$$2x - z + 3 = 0$$

وهو المطلوب .

١٤٩ - نرسم من مبدأ الاحداثيات o أنصاف المستقيمات oA و oB و oC التي أمثالها الموجهة هي :

$$(a , b , c) ; (a' , b' , c') ; (a'' , b'' , c'')$$

اكتب معادلة المستوي P المار بـ oA والعمودي على BOC . ثم اكتب معادلة المستوي Q المار بـ oA والعمودي على المستوي P

الحـل :

ان الأمثال الموجهة للناظم على المستوي BoC هي :

$$\alpha = b' c'' - c' b'' \quad ; \quad \beta = c' a'' - a' c'' \quad ; \quad \gamma = a' b'' \quad b' a''$$

فالمستوي P يمر بمبدأ الاحداثيات ويوازي الشعاعين (a , b , c) و $(\alpha , \beta , \gamma)$ فمعادلته هي :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{vmatrix} = o$$

وبنشر هذا المعين وفق عناصر السطر الأول نجد :

$$(c\beta - b\gamma) x + (a\gamma - c\alpha) y + (b\alpha - a\beta) z = o$$

وأما المستوي Q فهو يوازي الناظم على المستوي (1) كما انه يوازي الشعاع (a , b , c) ويمر بمبدأ الاحداثيات فمعادلته هي :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ (c\beta - b\gamma) & (a\gamma - c\alpha) & (b\alpha - a\beta) \end{vmatrix} = o$$

ويمكن نشر هذا المعين بسهولة فنحصل على شكل آخر للمعادلة .

١٥٠ – عين الزوايا التي يصنعهـا العمود النازل من o على المستوي :

$$x - 2y + z - 1 = o$$

مع المحاور الاحداثية :

الحــل :

إن أمثال توجيـه الناظم على هذا المستوي هي (1 ، 2 – ، 1) فجيوب

تمام توجيهه هي $\left(\frac{1}{\sqrt{6}} , \frac{-2}{\sqrt{6}} , \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$. فاذا كانت α و β و γ

الزوايا التي يصنعها العمودي النازل من o على المستوي مـــع المحـاور الاحداثية فان :

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} , \cos \beta = - \frac{2}{\sqrt{6}} , \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

١٥١ – عين المستقيمات التي تنتج من تقاطع المستوي :

$$x + 3y - 2z - 5 = o \qquad (1)$$

مع المستويات الاحداثية .

الحل :

ان المستوي oxy يعطى بالمعـــادلة $z = o$ ؛ فلكي نحصل على تقاطع هذا المستوي مع المستوي (1) نعوض في المستوي الأخير $z = o$ فنجد :

$$x + 3y = 5$$

وللحصول على معادلة المستقيمين حيث يتقاطع (1) مع المستويـــين oyz و oxz يكفي أن نعوض على الترتيب $x = o$ و $y = o$ في (1) فنجد :

$$3y - 2z = 5 \; ; \quad x - 2z = 5$$

١٥٢ – احسب زاوية المستويين :

$$2x + y - 2z = 4 \qquad 3x + 6y - 2z = 12$$

الحــل :

إن زاوية المستويين تساوي أو تكمل الزاوية المحصورة بين ناظميها . ولكن امثال توجيه الناظم على المستوي الأول هي (2 و 1 و – 2) وامثال توجيه الناظم على المستوي الثاني هي (3 و 6 و – 2) وبالتـالي تعطى زاوية المستويين Θ بالعلاقة :

$$\cos \Theta = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 6 - 2 \cdot (-2)}{\sqrt{4 + 1 + 4} \cdot \sqrt{9 + 36 + 4}} = \frac{16}{21}$$

١٥٣ – هل تقع النقطتان (1 , 1 , 2) و (3 , 1 , 2) في جانب واحد من المستوي .

$$x + 2y - z - 2 = 0$$

الحــل :

نعلم أن المستوي يقسم الفراغ إلى قسمين يكون من أجـل نقط احدهما :

$$x + 2y - z - 2 > 0 \qquad (1)$$

ومن أجل نقط الآخر :

$$x + 2y - z - 2 < 0 \qquad (2)$$

وبما أن النقطة الأولى تحقق (1) والنقطة الثانية تحقق (2) فالنقطتان واقعتان في جانبين مختلفين من المستوي .

١٥٤ – البحث عن المستوي المنصف لزاوية المستويين :

$$P \equiv x + 2y - z - 1 = 0$$
$$Q \equiv x + 2y + z + 1 = 0$$

التي تقع فيها النقطة (5 , − 1 , 1)

الحــل :

إن منصفات الزوايا الحادثة من تقاطع المستويين المفروضين هي :

$$\frac{x + 2y - z - 1}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \mp \frac{x + 2y + z + 1}{\sqrt{1 + 4 + 1}}$$

ومنه اما : $z + 1 = 0 \qquad (1)$

أو : $x + 2y = 0$

ولكن النقطة (1 , 1 − , 5) تقع في الجـانب $P > 0$ والجـانب $Q > 0$ ، وإذا أخذنا احدى نقط المستوي (1) مثل (1 − , 1 , 0) فنجد أنها تقع في الجانب $P > 0$ والجانب $Q > 0$ ولذلك فان المستوي المطلوب هو المستوي (1) .

١٥٥ – بيّن أن المستويات المعينة بالمعادلة الآتية :

$$(2t^3 + t + 2)x + (t^3 - t + 1)y - (t^3 - t + 1)z + 2t^3 + t + 2 = 0$$

تمر بمستقيم ثابت حين يتغير الوسيط t .

الحــل :

لنرتب هذه المعادلة وفق القوى المتناقصة للوسيط t فنحصل :

$$t^3(2x + y - z + 2) + t(x - y + z + 1) + (2x + y - z + 2) = 0$$

ومنه يتبيّن لنا أن جميع النقط التي تعدم أمثال هذه المعادلة ، أي التي تحقق جملة المعادلات :

$$(1) \qquad 2x + y - z + 2 = 0$$
$$(2) \qquad x - y + z + 1 = 0$$
$$(3) \qquad 2x + y - z + 2 = 0$$

تحقق معادلة المستويات المفروضة مهما كان الوسيط t . أي أن جميع هذه المستويات تمر بالنقط التي تحقق المعادلات (1) و (2) و (3) بآن واحد . ولكننا نلاحظ أن (3) هي (1) نفسها ، ولذلك فإن هذه النقط تقع على المستقيم الفراغي المعين بتقاطع المستويين (1) و (2) وهو المطلوب .

١٥٦– اكتب معادلة المستوي المار بالمستقيم :

$$x + 2y - z + 4 = 0$$
$$2x - y + 4z - 1 = 0$$

وبالنقطة $A(1, 1, 1)$.

الحـــل :

ان جميع المستويات المارة بالمستقيم المفروض تعطى بالحزمة المشكلة من المستويين المعينين للمستقيم ، أي بالحزمة :

$$x + 2y - z + 4 + \lambda(2x - y + 4z - 1) = 0$$

ولتعيين مستوي الحزمة المار بالنقطة A ، نعوض احداثيات A في معادلة الحزمة فنجد :

$$6 + 4\lambda = 0$$

وبحل هذه المعادلة نجد $\lambda = -\frac{3}{2}$. نعوض هـذه القيمة في معادلة الحزمة فنحصل على المعادلة المطلوبة التالية :

$$4x - 7y + 14z - 11 = 0$$

١٥٧ – (١) اكتب معادلات وجوه رباعي الوجوه ، الذي رؤوسه هي النقط :

$S(0, 0, 3)$; $A(4, -2, 0)$; $B(4, 6, 0)$; $C(2, 2, 0)$

(٢) اكتب معادلات المستويات المنصفة الداخلية للثنائيات BC و AC و AB .

(٣) استنتج قيمة نصف قطر الكرة المرسومة داخل هذا الرباعي والمماسة لوجوهه .

الحـل :

(١) ان معادلة الوجه المار بالنقط S و A و B هي [حسب (٤)] .

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المعين وفق عناصر السطر الثاني نجد :

$$-3 \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذين المعينين ثم بترتيب المعادلة الناتجة نحصل :

$$3x + 4z - 12 = 0 \qquad (1)$$

وأما معادلة الوجه SAC فهي :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

أو :

$$2x + y + 2z - 6 = 0 \qquad (2)$$

بالطريقة نفسها نلاحظ أن معادلة الوجه SBC هي :

$$6x - 3y + 2z - 6 = 0 \qquad (3)$$

وأن معادلة الوجه ABC هي :

$$z = 0 \qquad (4)$$

(٢) لتعيين المنصف الداخلي للثنائية BC نلاحظ أن وجهي هـــذه الثنائية هما ABC و SBC المعينين بالمعادلتين (3) و (4) . إن معادلتي منصفي زاوية هذين المستويين هما :

$$\frac{6x - 3y + 2z - 6}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \pm \frac{z}{\sqrt{1}}$$

أي :

$$6x - 3y + 2z - 6 = \pm 7z$$

فاما أن يكون :

$$6x - 3y - 5z - 6 = 0 \qquad (5)$$

أو أن يكون :

$$6x - 3y + 9z - 6 = 0 \qquad (6)$$

إلا اننا نلاحظ أن النقطتين A و S تقعان في جهتين مختلفتين بالنسبة للمستوي (5) وفي جهة واحدة بالنسبة للمستوي (6) وهي الجهة :

$$6x - 3y + 9z - 6 > 0$$

مما يدل على أن المنصف المطلوب هو المعطى بالمعادلة (5) [لأنه لابد المنصف الداخلي للثنائية BC أن يلاقي AS بين A و S] .

بطريقة مماثلة نلاحظ أن المنصف الداخلي للثنائية AC هو :

$$2x + y - z - 6 = 0 \qquad (7)$$

وأن المنصف الداخلي للثنائية AB هو :

$$x + 3z - 4 = 0 \qquad (8)$$

(٣) إن مركز الكرة المطلوبة هو نقطة تقاطع المستويات (5) و (7) و (8) . بحل جملة المعادلات هذه نجد ($\frac{6}{11}$ ، $\frac{20}{11}$ ، $\frac{26}{11}$) . أما نصف قطر الكرة المطلوب فهو بعد هذا المركز عن أحد الوجوه ، وليكن الوجه المعين بالمعادلة (4) : اذن يكون نصف القطر المطلوب (استناداً إلى دستور بعد نقطة عن مستو) :

$$r = \frac{6}{11}$$

١٥٨ – لدينا المستوي $P \equiv x + 2y - z + 4 = 0$. احسب زواياه مع المستويات الاحداثية وبعده عن النقطة (1 ، 3 – ، 6) وزاويته مع المستوي $Q \equiv 2x - y + 4z - 1 = 0$. اكتب معادلتي المستويين المنصفين للثنائية (P , Q) .

الحــل :

ان الأمثال الموجهة للناظم على المستوي P هي (1 - ، 2 ، 1) والأمثال الموجهة للناظم على المستوي xoy هي (1,0 ، 0) وبما أن الزاوية بين المستويين تساوي الزاوية بين النـــاظمين (أو تكملها) وإذا رمزنا بـ φ_1 لزاوية المستوي P مع المستوي xoy نجد :

$$\cos \varphi_1 = \frac{(1, 2, -1) \cdot (1, 0, 0)}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{1+0+0}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

بطريقة مماثلة نجد ، إذا رمزنا بـ φ_1 و φ_2 لزوايتي P مـع المستويين xoz و yoz على الترتيب .

$$\cos \varphi_2 = \frac{2}{\sqrt{6}} \; ; \; \cos \varphi_3 = \frac{-1}{\sqrt{6}}$$

وأما بعد النقطة (1 - ، 3 - ، 6) عن المستوي P فهي استناداً إلى بعد نقطة عن مستو :

$$\frac{|6 + 2(-3) - (-1) + 4|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

وبما أن الأمثال الموجهة للناظم على المستوي Q هي (4 ، 1 - ، 2)
فالزاوية Θ بين المستويين P و Q تعطى بالعلاقة :

$$\cos \Theta = \frac{(2, -1, 4) \cdot (1, 2, -1)}{\sqrt{4+1+16} \cdot \sqrt{1+4+1}} = \frac{-4}{\sqrt{126}} = \frac{-4}{3\sqrt{14}}$$

وأما معادلتا المستويين المنصفين للثنائية (P , Q) فهما :

$$\frac{x + 2y - z + 4}{\sqrt{6}} = \mp \frac{2x - y + 4z - 1}{\sqrt{21}}$$

١٥٩ – اكتب معادلتي المستقيم المـــار بالنقطتين (1 ، 2 ، 1) و (2 , 1 , 3) .

الحل :

إن الأمثال الموجهة للمستقيم المطلوب هي :

$$2 - 1 = 1 \quad ، \quad 1 - 2 = -1 \quad ، \quad 3 - 1 = 2$$

ولذلك فإن معادلاتيه هما :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

١٦٠ – لدينا المستقيمان المعينان بالمعادلات :

$$D \begin{cases} z = k \\ y = o \end{cases} \qquad D' \begin{cases} z = -k \\ x = o \end{cases}$$

نأخذ على المستقيم D النقطة M التي فصلها a ، وعلى المستقيم D' النقطة M' التي ترتيبها a' .

المطلوب ايجاد معادلتي المستقيم MM' .

الحـــل :

بما أن النقطة M تقع على المستقيم D فإن احداثياتها هي :

$$x = a \quad ; \quad y = o \quad ; \quad z = k$$

وبما أن النقطة M' تقع على المستقيم D' فان احداثياتها هي :

$$x = 0 \quad ; \quad y = a' \quad ; \quad z = -k$$

واستناداً إلى الدستور الذي يعطي معادلتي المستقيم المـــار بنقطتين مفروضتين تكون المعادلتان المطلوبتان هما :

$$\frac{x}{a} = \frac{y - a'}{-a'} = \frac{z + k}{2k}$$

١٦١- اكتب معـادلتي المستقيم المـار من النقطـــة (2 , 1 , 1) والموازي للمستويين :

$$2x - y + 1 = 0$$
$$y - 1 = 0$$

الحـل :

بما أن المستقيم المفروض يوازي المستويين فهو يوازي فصلهما المشترك . وبما أن الفصل المشترك عمودي على كل من ناظمي المستويين ولذلـــك فاننا نحصل على أمثاله الموجهة بضرب الناظم على المستوي الأول شعاعياً بالناظم على المستوي الثاني . وبما أن الأمثال الموجهة للناظم على المستوي الأول (0 , 1 - , 2) والأمثال الموجهـة للناظـم على المستوي الثاني (0 , 1 , 0) فالأمثال الموجهة للفصل المشترك (2 , 0 , 0) وعلى هـذا فمعادلتا المستقيم هما :

$$\frac{x - 2}{0} = \frac{y - 1}{0} = \frac{z - 1}{2}$$

أو :

$$x = 2$$

$$y = 1$$

١٦٢- اكتب معادلتي المستقيم المار بالنقطة $(1, 2, -1)$ والعمودي على المستوي $3x - 5y + 4z = 5$ ثم احسب طول العمود النازل من النقطة المفروضة على المستوي واحداثيات موقع العمود .

الحل :

ان المستقيم المطلوب يمر بالنقطة $(1, 2, -1)$ ويوازي الشعاع $(3, -5, 4)$ ولذلك فمعادلتاه هما :

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+1}{4} \qquad (1)$$

وطول العمود هو بعد النقطة المفروضة عن المستوي فيساوي اذن :

$$\frac{|3 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 4(-1) - 5|}{\sqrt{9 + 25 + 16}} = \frac{8\sqrt{2}}{5}$$

وأما موقع العمود فهو نقطة تقاطع المستوي المفروض مع المستقيم (1) ، فاذا دعونا النسبة المشتركة في (1) بـ ϱ فعندئذ تكون معادلات المستقيم الوسيطية هي :

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3\varrho \\ y &= 2 - 5\varrho \\ z &= -1 + 4\varrho \end{aligned} \qquad (2)$$

وبالتعويض في معادلة المستوي نجد :

$$\varrho = \frac{8}{25}$$

فالنقطة المطلوبة تتعين إذن من (2) بتعويض ϱ بقيمتها :

$$\left(\frac{49}{25} ، \frac{2}{5} ، \frac{7}{25} \right)$$

١٦٣ – احسب زاوية المستقيمين :

$$\begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

الحـل :

بسهولة نلاحظ ان الأمثال الموجهة لناظم المستوي الأول المستقيم الأول (1 و 2 و 1) والأمثال الموجهة لناظم المستوي الثاني (1 و 2 – و 1) لذلك فإن الأمثال الموجهة للمستقيم الأول ، الفصل المشترك المستويين ، هي (4 – و 0 و 4) وبالطريقة نفسها نجد الأمثال الموجهة للمستقيم الثاني هي (0 و 3 – و 3 –) وزاوية المستقيمين تعطى بالعلاقة :

$$\cos \Theta = \frac{4(-3) + 0(-3) - 4(0)}{\sqrt{16 + 16} \times \sqrt{9 + 9}} = -\frac{1}{2}$$

ومنه :

$$\Theta = \frac{2\pi}{3}$$

١٦٤ – عين الزاوية بين المستقيم :

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

والمستوي :

$$x - y + z + 1 = 0$$

الحـل :

ان الأمثال الموجهة للمستقيم هي $(2 , 4 , -2)$ أو $(1 , 2 , -1)$ والأمثال الموجهة للناظم على المستوي هي $(1 , -1 , 1)$ ولكن الزاوية بين الناظم على المستوي والمستقيم تتمم زاوية المستقيم مع المستوي إذن :

$$\sin \Theta = \frac{-2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

١٦٥ – أوجد معادلات مرتسمات المستقيم :

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x + 4y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

على المستويات الاحداثية :

الحـل :

بحذف z من المعادلتين المفروضتين نحصل على معادلة مرتسم المستقيم المفروض على المستوي oxy :

$$3x + 5y - 4 = 0$$

وبحذف y نحصل على معادلة المرتسم على المستوي oxz :

$$2x + 5z - 1 = 0$$

وبحذف x نحصل على معادلة المرتسم على المستوي oyz :

$$2y - 3z - 1 = 0$$

١٦٦ – أوجد معادلتي المستقيم المار بالنقطة $M(1, 1, 2)$ والذي يلاقي المستقيم D المعين بالمعادلتين :

$$\begin{cases} x - 2y + 2z + 1 = 0 \\ 3x - y + 5z - 2 = 0 \end{cases}$$

ويتعامد معه . أوجد احداثيات تقاطع هـــذا العمود مع المستقيم المذكور .

الحــل :

لنمثل المستقيم المفروض وسيطياً فنضع $z = \varrho$ في المعادلتين المفروضتين ثم نحلها بالنسبة لـ x و y فنجد :

$$x = 1 - \frac{8\varrho}{5} \; ; \quad y = 1 + \frac{\varrho}{5} \; ; \quad z = \varrho$$

ولو استبدلنا بالوسيط ϱ وسطياً آخر $t = \frac{\varrho}{5}$ (لتبسيط الحسابات) لحصلنا على التمثيل الوسطي .

$$x = 1 - 8t \; ; \quad y = 1 + t \; ; \quad z = 5t \qquad (1)$$

وتكون الأمثال الموجهة المستقيم الذي يصل M بنقطـــة من D (موافقة لقيمة الوسيط t) هي :

$$8t \; ; \qquad -t \; ; \qquad 2 - 5t$$

وشرط تعامد هذا المستقيم مع المستقيم D (الذي أمثاله الموجهة هي $(-8, 1, 5)$) :

$$8(8t) + 1(-t) + 5(2 - 5t) = 0$$

ومنه نجد $t = \frac{1}{9}$

بالتعويض في (1) نحصل على النقطة من المستقيم D الواقعة على المستقيم المطلوب (نقطة تقاطع المستقيم D مع المستقيم المطلوب) .

$$x = \frac{1}{9} \quad ; \quad y = \frac{10}{9} \quad ; \quad z = \frac{5}{9}$$

ومعادلتا المستقيم المار بهذه النقطة والنقطة M هما :

$$\frac{x - 1}{-\frac{8}{9}} = \frac{y - 1}{\frac{1}{9}} = \frac{z - 2}{-\frac{13}{9}}$$

أو :

$$\frac{9}{8}((1-x)) = 9(y - 1) = \frac{9}{13}(2 - z)$$

طريقة أخرى : نكتب معادلة المستوي المار بـ M والعمودي على D : إن الامثال الموجهة للمستقيم D نحصل عليها بالضرب الشعاعي للناظمين على المستويين المفروضين فنجد (5 , 1 , 8 -) فمعادلة المستوي المار بـ M والعمودي على D هي :

$$-8(x - 1) + (y - 1) + 5(z - 2) = o$$

أو :

$$-8x + y + 5z - 3 = o \qquad (2)$$

بحل هذه المعادلة مع معادلتي المستقيم D نحصل على نقطة تلاقي المستقيم المطلوب مع المستقيم D .

$$\left(\frac{1}{9} , \frac{10}{9} , \frac{5}{9} \right)$$

ثم نكتب معادلتي المستقيم المار بـ M وبهذه النقطة كما فعلنا في الطريقة الأولى .

ملاحظة : إن المستقيم المطلوب يقع في المستوي (2) . فلو استطعنا الحصول على مستو آخر يقع فيه المستقيم المطلوب لتم المطلوب (بطريقة ثالثة) . للحصول على هذا المستوي الثاني نكتب معادلة الحزمة المكونة من مستويي D :

$$x - 2y + 2z + 1 + \lambda (3x - y + 5z - 2) = 0$$

ولنعين λ بحيث يمر مستوي الحزمة من النقطة M فنجد :

$$4 + 10 \lambda = 0$$

ومنه نجد $\lambda = - \frac{2}{5}$. بالتعويض في معادلة الحزمة نجد :

$$x + 8y - 9 = 0 \qquad (3)$$

والمستقيم المطلوب يتعين بـ (2) و (3) .

١٦٧ – أوجد معادلات المستقيمات التي تقطع المستقيمين :

$$D \begin{cases} z = 0 \\ x = a \end{cases} \qquad B' \begin{cases} x = 0 \\ y = a \end{cases}$$

وتصنع مع هذين المستقيمين زاويتين متساويتين :

الحل :

إن المعادلات الوسيطية المستقيم D هي :

$$x = a \; ; \quad y = \varrho \; ; \quad z = o$$

والمعادلات الوسيطية للمستقيم D' هي :

$$x = o \; ; \quad y = a \; ; \quad z = \lambda$$

والمعادلتان الديكارتيان للمستقيم Δ الذي يصل نقطة ما من المستقيم الأول (موافقة لقيمة ما لـ ϱ) بنقطة ثانية من المستقيم الثاني (موافقة لقيمة ما لـ λ) هما :

$$\frac{x}{a} = \frac{y-a}{\varrho - a} = \frac{z-\lambda}{-\lambda} \qquad (1)$$

إن الأمثال الموجهة لهذا المستقيم هي :

$$a \; ; \quad \varrho - a \; ; \quad -\lambda$$

والأمثال الموجهة لـ D هي $(0 , 1 , 0)$ والأمثال الموجهة لـ D' هي $(0 , 0 , 1)$. فلكي يصنع Δ زاويتين متساويتين مع D و D' يلزم أن يكون (نكتب أن جيب تمام الزاوية التي يصنعها Δ مع D تساوي جيب تمام الزاوية التي يصنعها Δ مع D') :

$$\frac{\varrho - a}{\sqrt{a^2 + (\varrho - a)^2 + \lambda^2}} = \mp \frac{-\lambda}{\sqrt{a^2 + (\varrho - a)^2 + \lambda^2}}$$

ومنه :

$$\varrho - a = \pm \lambda$$

والمعادلات المطلوبة هي (بالتعويض في (1)) :

$$\frac{x}{a} = \frac{y-a}{\mp \lambda} = \frac{z-\lambda}{-\lambda}$$

١٦٨ – عين مستقيماً يمر بمبدأ الاحداثيات ويستند إلى المستقيمين :

$$D \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad D' \begin{cases} y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$$

الحـل :

ان المعادلات الوسيطية للمستقيم D هي :

$$x = 1 \;;\quad y = 2 \;;\quad z = \varrho$$

والمعادلات الوسيطية للمستقيم D′ هي :

$$x = \lambda \;;\quad y = 3 \;;\quad z = 4$$

ومعادلة المستقيم الذي يصل نقطة من المستقيم الأول (موافقة لقيمة ما لـ ϱ) بنقطة من المستقيم الثاني (موافقة لقيمة ما لـ λ) هما :

$$(1) \qquad \frac{x-1}{\lambda-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-\varrho}{4-\varrho}$$

ولكي يمر هذا المستقيم بمبدأ الاحداثيات يلزم أن يكون :

$$\frac{-1}{\lambda-1} = -2 = \frac{-\varrho}{4-\varrho}$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد $\varrho = \frac{8}{3}$ و $\lambda = \frac{3}{2}$. بالتعويض في (1) نجد المستقيم المطلوب :

$$\frac{x-1}{1/2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-8/3}{4/3}$$

١٦٩ – أوجد معادلة المستوي المار بالمستقيم :

$$(1) \qquad x + y + z = 0 \;,\quad 2x - y + 3z = 0$$

والموازي للمستقيم : $x = 2y = 3z$ (2)

الحـل :

(١) ان المستوي المطلوب هو أحد مستويات الحزمة :

$$(1 + 2\lambda)x + (1 - \lambda)y + (1 + 3\lambda)z = 0 \qquad (3)$$

المتشكلة من المستويين (1) والموازي للمستقيم (2) الذي يمكن كتابته على الشكل :

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$$

ولذلك فإن الأمثال الموجهة هي (2 , 3 , 6) ، والمستوي المطلوب هو احد المستويات (3) من أجل قيمـــة لـ λ تتعين بكتابة شرط توازي هذا المستوي مع المستقيم المفروض « تعامد الناظم على المستوي مـــع المستقيم المفروض » إذن :

$$6(1 + 2\lambda) + 3(1 - \lambda) + 2(1 + 3\lambda) = 0$$

ومنـه :

$$\lambda = -\frac{11}{15}$$

بالتعويض في (3) نجد معادلة المستوي المطلوب :

$$7x - 26y - 18z = 0$$

١٧٠ - لدينا جملة المعادلات الخطية :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

فـإذا رمزنا بـ $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ و $\vec{D}$ للأشعة :

$$\vec{A}(a_1, a_2, a_3) ، \vec{B}(b_1, b_2, b_3) ، \vec{C}(c_1, c_2, c_3)$$

$$\vec{D}(d_1, d_2, d_3)$$

وإذا كان : $\Delta = (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) \neq 0$

فان حل مجموعة المعادلات المفروضة هو :

$$x = \frac{(\vec{D}, \vec{B}, \vec{C})}{\Delta} ، y = \frac{(\vec{A}, \vec{D}, \vec{C})}{\Delta} ، z = \frac{(\vec{A}, \vec{B}, \vec{D})}{\Delta}$$

الحـــل :

يمكن تمثيل جملة المعادلات المفروضة بالمعادلة الشعاعية :

$$x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C} = \vec{D} \quad (1)$$

فلو ضربنا طرفي هذه المعادلة داخلياً بالشعاع $(\vec{B} \wedge \vec{C})$ لوجدنا :

$$x(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) + y(\vec{B}, \vec{B}, \vec{C}) + z(\vec{C}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{D}, \vec{B}, \vec{C})$$

ومنـــه :

$$x = \frac{(\vec{D}, \vec{B}, \vec{C})}{\Delta}$$

ولو ضربنا طرفي المعادلة (1) بـ $(\vec{C} \wedge \vec{A})$ تارة و بـ $(\vec{B} \wedge \vec{A})$ تارة أخرى لحصلنا على قيم y و z المطلوبة .

١٧١– برهن ان المستقيم :

$$(1) \qquad 2x - y + 3z + 3 = 0$$
$$(2) \qquad x + 10y - 21 = 0$$

يقطع المستقيم :

$$(3) \qquad 2x - y = 0$$
$$(4) \qquad 7x + z - 6 = 0$$

احسب احداثيات نقطة التقاطـع واكتب معادلة المستوي الحـاوي لكل من المستقيمين .

الحـل :

كي يتقاطع المستقيمان يجب أن تتلاقى المستويات الأربعة (1) و (2) و (3) و (4) في نقطة واحدة . فإذا حسبنا حلول ثلاث معادلات منها ولتكن (1) و (2) و (3) نجد :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 21 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & 10 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-63}{-63} = 1$$

وبالطريقة نفسها نجد : $y = 2 \quad z = -1$

ولما كانت نقطة التقاطع $(1, 2, -1)$ تحقق المستوي (4) ولذلك فان المستقيمين يتقاطعان بالنقطة $(1, 2, -1)$.

والمستوي المطلوب يمر بنقطـة التقاطـع ويوازي كلاً من المستقيمين المفروضين أي أنه يوازي الشعاعين $(-10, 1, 7)$ و $(-1, -2, 7)$

ولذلك فمعادلته :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -10 & 1 & 7 \\ -1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

وبنشر هذا المعين نجد : $x + 3y + z = 6$

١٧٢– عين مسقط النقطة (1 , 3 , 2) على المستقيم :

$$z = 3t - 2 \quad , \quad y = 2t - 2 \quad , \quad x = t - 7 \qquad (1)$$

الحـل :

ان مسقط النقطة على المستقيم المفروض هي نقطة تقاطـع المستوي المار بالنقطة المفروضة والعمودي على المستقيم المفروض بالمستقيم المفروض نفسه . ولما كانت الأمثال الموجهة للمستقيم هي (3 , 2 , 1) فإن معادلة المستوي المذكور هي :

$$(x - 2) + 2(y - 3) + 3(z - 1) = 0$$

أي :

$$x + 2y + 3z - 11 = 0 \qquad (2)$$

فتقاطع هـــذا المستوي مـع المستقيم المفروض ينتـج بتعويض (1) بـ (2) فنجد $t = 2$.

والنقطة المطلوبة تنتج عن تبديل $t = 2$ بـ (1) فنجد : (4 , 2 , 5–)

١٧٣– أوجد الشكل العادي للمستقيم :

$$8x + 12y - 13z = 32 \qquad 4x + 4y - 5z = 12$$

واكتب معادلة المساقط على المستويات الاحداثية الثلاث :

الحـل :

ان الأمثال الموجهة للمستقيم هي (4 ، 3 ، 2) بقي ان نعرف احدى نقط المستقيم ولتكن تلك التي يقطع فيها المستوي xoy فإذا عوضنا كل z بصفر في معادلات المستقيم وجدنا $x = 1$ ، $y = 2$ ومنه تكون معادلات المستقيم المطلوبة :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4}$$

وأما معادلة المسقط على المستوي xoy فهي العلاقة بين x و y للنقطة التي ترسم المستقيم المفروض . فمن النسبة الاولى والثانية من المعادلات الأخيرة نجد :

$$3x - 2y + 1 = 0$$

بطريقة مماثلة نجد معادلات المساقط على المستوي xoz و xoz هي :

$$4y - 3z = 8 \qquad 2x - z = 2$$

١٧٤ – احسب بعد النقطة $M_1(6, 6, -1)$ عن المستقيم :

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-1}$$

الحـل :

المستقيم المفروض يمر بالنقطة $M_0(2, 1-3)$ ويوازي الشعاع $\vec{V}(1, 2, -1)$

وبسهولة نجد : $|M_0\vec{M_1} \wedge \vec{V}| = \sqrt{126}$ و $|\vec{V}| = \sqrt{6}$ ومنه البعد المطلوب يساوي :

$$\sqrt{126} : \sqrt{6} = \sqrt{21}$$

١٧٥– احسب بعـــد النقطـة $(1, 2, 3)$ عن المستقيم المعين بالمعادلتين :

$$x + 2y - 7z - 6 = 0 \qquad 4x + 2y - 3z - 8 = 0 \qquad (1)$$

الحــل :

ان المستويين المفروضين ليسا متعامدين ولذلك نشكل حزمـــة المستويات :

$$(4+\lambda)x + (2+2\lambda)y - (3+7\lambda)z - (8+6\lambda) = 0$$

ولنعين أحد مستويات الحزمة المتعامد مع المستوي الأول . إن هذا المستوي يوافق قيمة لـ λ تعطى بالعلاقة :

$$4(4+\lambda) + 2(2+2\lambda) + 3(3+7\lambda) = 0$$

ومنه : $\lambda = -1$

والمستوي المطلوب هو : $3x + 4z - 2 = 0 \qquad (2)$

ويكون بعد النقطة $(1, 2, 3)$ عن المستوي الأول من (1) :

$$d_1 = \frac{9}{\sqrt{29}}$$

وعن المستوي (2) هو :

$$d_2 = \frac{13}{5}$$

ويكون :

$$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \frac{\sqrt{6926}}{5\sqrt{29}}$$

١٧٦– أوجد طول ومعادلة العمود المشترك للمستقيمين :

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-1} \qquad (1)$$

$$\frac{x+6}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{-1} \qquad (2)$$

الحـل :

إذا دعونا النسبة المشتركة في (1) بـ ϱ وفي (2) بـ λ حصلنا على المعادلات الوسيطية للمستقيمين .

$$(3) \qquad x = 3 + \varrho \quad ، \quad y = 4 + \varrho \quad ، \quad z = -1 - \varrho$$

$$(4) \qquad x = -6 + 2\lambda \quad ، \quad y = -5 + 4\lambda \quad ، \quad z = 1 - \lambda$$

إن أمثال توجيه المستقيمات الواصلة بين نقطة ما من المستقيم الأول ونقطة ما من المستقيم الثاني هي :

$$9 + \varrho - 2\lambda \quad ، \quad 9 + \varrho - 4\lambda \quad ، \quad -2 - \varrho + \lambda$$

والعمود المشترك عمودي على كل من المستقيمين المفروضين ، إذن يجب أن يكون :

$$(9 + \varrho - 2\lambda) + (9 + \varrho - 4\lambda) - (-2 - \varrho + \lambda) = 0$$

$$2(9 + \varrho - 2\lambda) + 4(9 + \varrho - 4\lambda) - (-2 - \varrho + \lambda) = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد $\quad \varrho = -2 \quad ، \quad \lambda = 2$

ويكون بالتالي العمود المشترك هو المستقيم الواصل بين النقطتين اللتين نحصل عليهما بتبديل قيم ϱ و λ التي حصلنا عليها في (3) و (4) :

$$(1 , 2 , 1) \quad ، \quad (-2, 3, -1)$$

وطول العمود المشترك هو البعـــد بين هـاتين النقطتين $\sqrt{14}$

ومعادلته هي :

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

١٧٧ – اكتب معادلتي العمود المشترك للمستقيمين :

$$D \begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \qquad D' \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ -2x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

ثم احسب طول هذا العمود :

الحـــل :

ان الأمثال الموجهة للمستقيم D هي (1 , 1 ، 1 –) والأمثال الموجهة المستقيم D′ هي (1 ، 1 , 2 –) فتكون الأمثال الموجهة للعمود المشترك (3 , 1 – , 2) . لنكتب معادلة المستوي الماء بـ D والموازي للعمود المشترك فنشكل من أجل ذلك معادلة الحزمة من مستويي D :

$$(2+\lambda)x - y + (3+\lambda)z - 1 - 2\lambda = 0$$

ونختار مستوي الحزمة الموازي للعمود المشترك (نكتب شرط تعامد الناظم على مستوي الحزمة مع العمود المشترك) :

$$2(2+\lambda) + 1 + 3(3+\lambda) = 0$$

ومنه $\lambda = -\frac{14}{5}$. بالتعويض في معادلة الحزمة نجد المستوي :

$$4x + 5y - z - 23 = 0 \qquad (1)$$

نكتب بعد ذلك معادلة المستوي المار بـ D′ والموازي للعمود المشترك

نجد ، بطريقة مماثلة لما سبق ، المستوي :

$$x - 4y - 2z + 5 = 0 \qquad (2)$$

إن المعادلتين (1) و (2) يعينان العمود المشترك .

لحساب طول العمود نحل معادلات المستقيم D مع (2) فنجـــد النقطة $M_1 (\frac{19}{7} , \frac{16}{7} , \frac{-5}{7})$ ثم نحل معـادلات المستقيم D′ مع (1) فنجد النقطة $M_2 (\frac{2}{8} , \frac{5}{8} , \frac{11}{8})$ والبعد بين هاتين النقطتين :

$$\sqrt{(\frac{19}{7} - \frac{2}{8})^2 + (\frac{16}{7} - \frac{5}{8})^2 + (\frac{-5}{7} - \frac{11}{8})^2} \neq 3.6$$

هو طول العمود المطلوب .

١٧٨ – عين على المستقيم :

$$\begin{cases} x + y + z - 2 = o \\ x + 2y - z - 1 = o \end{cases} \qquad (1)$$

النقطة التي تبعد نفس البعد عن المستويين المتوازيين :

$$(2) \qquad z + 2y + z - 2 = o \quad ; \quad x + 2y + z - 1 = o$$

الحـل :

إن المحل الهندسي للنقط المتساوية البعـــد عن المستويين (2) هو المستوي :

$$\frac{x + 2y + z + 1}{\sqrt{6}} = - \frac{(x + 2y + z - 3)}{\sqrt{6}}$$

أي :

$$x + 2y + z 1$$

وبحل هذه المعادلة مع المعادلات (1) نجد (3 , – 1 , o) .

١٧٩ – أوجد نظير النقطة M (2 , – 1 , 3) بالنسبة للمستوي :

$$3x - y + 2z - 1 = o$$

الحـل :

لنفرض النقطة $M'(x', y', z')$ نظير M بالنسبة للمستوي المفروض ان المستقيم المار بـ M و M' والذي امثاله الموجهة :

$$2 - x' \;;\quad -1 - y' \;;\quad 3 - z'$$

عمودي على المستوي ، فهو يوازي الناظم على المستوي $(2, 1-, 3)$.

فمن شرط التوازي نكتب :

$$\frac{2 - x'}{3} = \frac{-1 - y'}{-1} = \frac{3 - z'}{2} \qquad (1)$$

كما أن نقطة منتصف القطعة $M M'$ ، التي احداثياتها :

$$\frac{x' + 2}{2} \;;\quad \frac{y' - 1}{2} \;;\quad \frac{z' + 3}{2}$$

تقع على المستوي المفروض ، ولذلك فإن احداثياتها تحقق معادلته :

$$3\,\frac{x' + 2}{2} - \frac{y' - 1}{2} + 2\,\frac{z' + 3}{2} - 1 = 0$$

أو :

$$3x' - y' + 2z' + 11 = 0 \qquad (2)$$

بحل المعادلات (1) و (2) نجد :

$$x' = -\frac{22}{7} \;;\quad y' = \frac{5}{7} \;;\quad z' = -\frac{3}{7}$$

وهو المطلوب :

١٨٠ – أوجد نظير المستوي :

$$Q \equiv x - 2y + z - 4 = 0$$

بالنسبة للمستوي :

$$P \equiv 2x + y - z + 1 = 0$$

الحـل :

ان المستوي النظير هو احد مستويات الحزمة المتشكلة من المستويين P و Q المتقاطعين :

$$(1) \qquad (x - 2y + z - 4) + \lambda (2x + y - z + 1) = 0$$

لتعيين قيمة λ الموافقة للمستوي المطلوب نبحث عن احدى نقاطه . ولذلك يكفي ان نختار نقطة من المستوي Q ونعين نظيرهـا بالنسبة للمستوي P . إن النقطة $(0, 0, 4)$ تقع على المستوي Q ، ويتعين نظير هذه النقطة كما في المسألة السابقة فنجـد $(2, 1, 3)$. لنعوض احداثيات هذه النقطة في المعادلة (1) فنحصل :

$$-1 + \lambda (3) = 0$$

ومنه $\lambda = \frac{1}{3}$. بتعويض هذه القيمة في (1) نحصل على معادلة المستوي المطلوب :

$$5x - 5y + 2z - 11 = 0$$

۱۸۱ – أوجد نظير المستقيم :

$$(1) \qquad \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

بالنسبة للمستوي :

$$(2) \qquad x + 2y + 3z - 1 = 0$$

الحـــل :

بحل المعادلات (1) و (2) نحصل على النقطة $M_1(-1, 1, 0)$ ،
حيث يقطع المستقيم (1) المستوي (2) . إن هذه النقطة من المستقيم
النظير . يكفي أن نعرف نقطة ثانية منه لنتمكن من كتابة معادلاته .
نختار النقطة من المستقيم (1) ولتكن (0 , 3 , 6) ولنبحث عن نظيرها
بالنسبة للمستوي (2) كما فعلنا في المسألة (١٧٩) فنجد أن هذا النظير هو
$M_2\left(\frac{-27}{7}, \frac{-25}{7}, \frac{-23}{7}\right)$. وبذلك تؤول المسألة إلى ايجـــاد معادلات
مستقيم مار بالنقطتين M_1 و M_2 :

$$\frac{x+1}{16} = \frac{y-1}{32} = \frac{z}{27}$$

١٨٢ – نعتبر المستويين :

$$p \equiv x(1-u^2) + y(1+u^2) + 2uz = a + bu + cu^2$$
$$Q \equiv 2u^2x + y - 2uz = a' + b'u + c'u^2$$

حيث : a و b و c و a' و b' و c' اعداد ثابتة و u وسيط متحول :

١ – برهن ان كلا من P و Q يمر بنقطة ثابتة .

٢ – احسب زاويتها v وبرهن أن :

$$2u^2 = tg\left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{8}\right) tg\left(\frac{v}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$$

٣ – برهن انه يوجد عدد غير منته من النقط الثابتة الواقعة على
بعد ثابت من P . برهن نفس الخاصة من أجل Q .

٤ – برهن أن P يصنع زاوية ثابتـــة مع مستقيم ثابت . احسب

هذه الزاوية . برهن نفس الخاصة من أجل Q .

الحــل :

إذا رتبنا معادلة المستوي الأول بالنسبة لقوى u المتزايدة وجدنا .

$$(y - x - c)u^2 + (2z - b)u + x + y - a = o$$

نلاحظ أن هذه المعادلة محققة مهما كانت u إذا كان :

$$y - x - c = o \text{ ، } 2z = b \text{ ، } x + y - a = o$$

أي :

$$x = \frac{a - c}{2} \text{ ، } y = \frac{a + c}{2} \text{ ، } z = \frac{b}{2}$$

وهذا يعني أن جميع المستويات P تمر بالنقطة :

$$\left(\frac{a - c}{2} \text{ ، } \frac{a + c}{2} \text{ ، } \frac{b}{2}\right)$$

بنفس الطريقة نجد أن المستويات Q تمر بالنقطة :

$$\left(\frac{c'}{2} \text{ , } a' \text{ , } -\frac{b'}{2}\right)$$

٢ – بما أن الأمثال الموجهة للناظم على المستوي الأول هي :

$$1 - u^2 \quad \text{ ، } \quad 1 + u^2 \quad \text{ ، } \quad 2u$$

والأمثال الموجهة للناظم على المستوي الثاني هي :

$$2u^2 \quad \text{ ، } \quad 1 \quad \text{ ، } \quad -2u$$

فإن :

$$\cos v = \frac{2u^2(1 - u^2) + (1 + u^2) - 4u^2}{\sqrt{2}(1 + u^2) \cdot (1 + 2u^2)}$$

أو :

$$\cos v = \frac{1 - 2u^2}{\sqrt{2}(1 + 2u^2)}$$

ومنه :

$$2u^2 = \frac{1 - \sqrt{2}\cos v}{1 + \sqrt{2}\cos v} = \frac{\cos\frac{\pi}{4} - \cos v}{\cos\frac{\pi}{4} + \cos v}$$

أي :

$$2u^2 = \operatorname{tg}\left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{v}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$$

٣ – اذا كانت X و Y و Z نقطة ما فإن بعدها عن المستويات P (بغض النظر عن الاشارة) هو :

$$d = \frac{(1 - u^2)X + (1 + u^2)Y + 2uZ - a - bu - cu^2}{\sqrt{2}(1 + u^2)}$$

فإذا رتبنا حسب قوى u وجدنا :

$$(c + \sqrt{2}d + X - Y)u^2 - (2Z - b)u + \sqrt{2}d - X - Y + a = 0$$

وهذه المعادلة تكون محققة مهما كانت u إذا كان :

$$X - Y + c + \sqrt{2}d = 0$$

$$2Z - b = 0$$

$$\sqrt{2}d - X - Y + a = 0$$

وبحل هذه المعادلات نجد :

$$X = \frac{a - c}{2} \text{ ، } Y = \sqrt{2}d + \frac{c + a}{2} \text{ ، } Z = \frac{b}{2}$$

وهذا يعني أنه من أجل كل قيمة لـ d توجد نقطة ثابتة تبعد عن كل المستويات نفس البعد والحل الهندسي لهذه النقط الثابتة هو المستقيم الموازي لمحور العينات :

$$X = \frac{a - c}{2} \quad ; \quad Z = \frac{b}{2}$$

بنفس الطريقة نجد الحل الهندسي للنقط الثابتة التي تبعد عن المستويات Q بعداً ثابتاً هو المستقيم :

$$Y - X = a' - \frac{c'}{2} \quad ; \quad Z = \frac{b'}{2}$$

٤ – كي تصنع المستويات P زاوية ثابتة مع مستقيم ثابت يكفي أن يصنع ناظمها زاوية ثابتة مع مستقيم ثابت . بسهولة نلاحظ أن جيوب تمام توجيه الناظم هي :

$$\frac{(1 - u^2)}{\sqrt{2}\,(1 + u^2)} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \frac{\sqrt{2}\,u}{1 + u^2}$$

ومنها نلاحظ أن الناظم على المستويات P ، مهما كانت u ، يصنع زاوية ثابتة مع محور العينات مقدارها $\frac{\pi}{4}$.

بنفس الطريقة نرى أن الناظم على المستويات Q يصنع زاوية ثابتة مع المنحى $\gamma = 0$ و $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، مقدارها $\frac{\pi}{4}$.

مسائل وتمارين غير محلولة

١٨٣– اكتب معادلة المستوي المار بالمبدأ والموازي لكل من المستقيمين .

$$x - y + 4z = 1 \quad , \quad 2x + y - 3z = 2$$

$$x + 3 = 2y + 1 = 3z + 2$$

١٨٤ – اكتب معادلة المستوي المار بالمستقيم :

$$3x - 4y + 5z = 10 \quad , \quad 2x + 2y - 3z = 4$$

والموازي للمستقيم : $x = 2y = 3z$

١٨٥ – أوجد نقطتين من المستقيم : $x = 2y = 3z + 6$

يبعدان 7 عن المستوي : $2x + y - 2z = 5$

١٨٦ – برهن أن المستويات الأربعة :

$$x + y + 2z = 4 \quad , \quad x + 2y - z = 2$$

$$2x - y - z = 0 \quad , \quad x + y + z = 3$$

تتلاقى في نقطة واحدة .

١٨٧ – احسب حجم رباعي الوجوه المحصور بالمستويات .

$$x + y + z = 1 \quad , \quad x - y = 1$$

$$x - z = 1 \quad , \quad z = 2$$

١٨٨– اكتب معادلة المستقيم المار من النقطتين $(1, 2, 1)$ ، $(1, 2, 3)$.

١٨٩ – عين الزاوية بين المستقيمين :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + z = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

١٩٠ – احسب جيب تمام الزاوية بين المستقيمين:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{2}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

١٩١ – عين مسقط المستقيم:

$$x + y + z = 1 \quad , \quad x - y - 2z = 0$$

على المستوي : $x + 2y + 3z - 6 = 0$

١٩٢– اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة $M\ (1, 2, 3)$ والذي يقطع محور السينات بشكل عمودي ثم اكتب معادلة المستقيم المار بنفس النقطة والقاطع لمحور العينات بشكل عمودي ثم أوجد معادلة المستوي المار بالمستقيمين المفروضين .

١٩٣ – أوجدمعادلة المستوي المارbالمستقيم $x = 2y = 3z$ والعمودي على المستوي $5x + 4y - 3z = 8$

١٩٤ – احسب بعد النقطة $(5, 4, 2)$ عن المستقيم :

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

واوجد احداثيات مسقط النقطة المفروضة على المستقيم المفروض .

١٩٥ – احسب طول ومعادلة العمود المشترك للمستقيمين :

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

$$\frac{x+7}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$$

١٩٦ – احسب طول العمود المشترك للمستقيمين :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + 2y + 2z = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y \quad z = 2 \end{cases}$$

١٩٧ – اوجـــد الشرط الذي يجب أن يتحقق حتى تمر المستويات الثلاث :

$$x = cy + bz$$
$$y = az + cx$$
$$z = bx + ay$$

بمستقيم واحد .

١٩٨ – لدينا مجموعة المستويات :

$$\frac{x}{\lambda - a} + \frac{y}{\lambda - b} + \frac{z}{\lambda - c} = 1$$

حيث λ وسيط و a و b و c اعداد ثابتة برهن :

١ – توجد ثلاثة مستويات تمر بنقطة ما M من الفراغ . احسب احداثيات M بدلالة λ_1 و λ_2 و λ_3 قيم λ المقابلة للمستويات الثلاثة .

٢ – عين وضع M كي ينطبق مستويان من المستويات الثلاثـــة السابقة .

٣ – عين وضع M كي تنطبق المستويات الثلاثة :

الاجوبة

١٨٣ – $13x + 20y - 69z = 0$

١٨٤ – $x - 20y + 27z = 14$

١٨٥ – $(12, 6, 2)$ ، $\left(-\frac{120}{11}, -\frac{60}{11}, -\frac{62}{11} \right)$

١٨٧ – 6

١٨٨ – $x - 1 = 0$ ، $y - 2 = 0$

١٨٩ – $\frac{\pi}{2}$

١٩٠ – $\cos \Theta = \frac{4}{9}$

١٩١ – $\begin{cases} 13x + y - 5z = 7 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$

١٩٢ – $6x + 3y - 2z = 6$ $\begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x = z \\ 3y = 2z \end{cases}$

١٩٣ – $17x - 28y - 9z = 0$

١٩٤ – $\sqrt{24}$ ، $(1, 6, 0)$

١٩٥ – $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-3}{1}$ ، $\sqrt{35}$

١٩٦ – $d = 1$

١٩٧ – $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$

١٩٨ – $$x = -\frac{(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)(a-\lambda_3)}{(a-b)(a-c)} - 1$$

$$y = -\frac{(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)(b-\lambda_3)}{(b-c)(b-a)}$$

$$y = -\frac{(c-\lambda_1)(c-\lambda_2)(c-\lambda_3)}{(c-a)(c-b)}$$

$$x = -\frac{(a-u)^2(a-v)}{(a-b)(a-c)} \qquad -2$$

$$y = -\frac{(b-u)^2(b-v)}{(b-c)(b-a)}$$

$$z = -\frac{(c-u)^2(c-v)}{(c-a)(c-b)}$$

$$x = \frac{(t-a)^3}{(a-b)} \text{ ، } y = \frac{(t-b)^3}{(b-c)(b-a)} \text{ ، } -3$$

$$z = \frac{(t-c)^3}{(c-a)(c-b)}$$

الفصل الخامس

الدائرة فى المستوي

١ – الدائرة هي المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن نقطة ثابتة . ندعو النقطة الثابتة مركز الدائرة والبعد الثابت نصف قطرها .

٢ – المعادلة الديكارتية للدائرة التي يقع مركزها في النقطة $c(a, b)$ والتي نصف قطرها R هي :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \qquad (1)$$

وفي الحالة الخاصة عندما يقع المركز في مبدأ الاحداثيات تأخذ المعادلة السابقة الشكل :

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (2)$$

من (١) نرى أن الشكل العام لمعادلة الدائرة هو

$$f(x, y) \equiv x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3)$$

شريطة أن يكون :

$$D^2 + E^2 - 4F > 0$$

٣ – تعطينا المعادلتان :

$$x = R\cos\theta \ ; \qquad y = R\sin\theta \qquad (4)$$

تمثيلاً وسطياً للدائرة (2) .

كما أنه إذا عوضنا في (4) كل $tg \frac{\Theta}{2}$ بـ t نحصل على التمثيل الوسطي :

$$x = R \frac{1 - t^2}{1 + t} \quad ; \quad y = \frac{2 R t}{1 + t^2}$$

٤ – ان المعادلة القطبية لدائرة يقع مركزها في النقطـــة $c (r_1 , \Theta_1)$ هي :

$$r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos (\Theta - \Theta_1) - R^2 = o$$

فاذا كان القطب في نقطة الاصل $(r_1 = o)$ فعندئذ يكون الشكل :

$$r = R$$

اما إذا كان القطب يقع على محيط الدائرة $(r_1 = R)$ فعندئذ يكون :

$$r = 2 R \cos (\Theta - \Theta_1)$$

٥ – معادلة الدائرة المارة بالنقط الثلاث (x_1 , y_1) و (x_2 , y_2) و (x_3 , y_3) هي :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = o$$

٦ – يشترك كل مستقيم في المستوي مع الدائرة « شأن كل منحنيات الدرجة الثانية » على الاكثر بنقطتين . فاذا اشترك المستقيم مـــع الدائرة بنقطتين دعي قاطعاً وإذا اشترك بنقطـــة واحدة ، أو بالأحرى ، بنقطتين منطبقتين دعي ممـــاساً .

معادلة المماس للدائرة (1) الذي ميله m هي :

$$y = m x - am + b \quad \mp R \sqrt{1 + m^2}$$

والدائرة (2) هو :

$$y = mx \mp R\sqrt{1 + m^2}$$

ومعادلة المماس للدائرة (1) في نقطة واقعة عليها (x_1, y_1) هي :

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = R^2$$

وللدائرة (2) هي :

$$x x_1 + y y_1 = R^2$$

اما ميل المماس m للدائرة (2) المار بالنقطة (x_1, y_1) فيتعين بالمعادلة :

$$(x_1^2 - R^2)m^2 - 2x_1 y_1 m + y_1^2 - R^2 = o$$

وهذه المعادلة تدلنا على أنه اما أن يمر مماسان في النقطــة المفروضة اذا وقعت النقطة خارج الدائرة أو مماساً واحداً إذا وقعت النقطة على محيط الدائرة أو يستحيل رسم أي مماس من النقطة المفروضة إذا وقعت النقطة داخل الدائرة .

٧ – تعرف قوة نقطة ما P بالنسبة لدائرة بأنهــا حاصل ضرب القياس الجبري للقطعتين اللتين تبدأن بـ P وتنتهيان في نقطتي تقاطع محور متحول مار بالنقطة P مع الدائرة المفروضة . ان قوة النقطة (x_o, y_o) بالنسبة للدائرة (3) هي : $f(x_o, y_o)$.

كما أنها تساوي حاصل طرح مربع نصف القطر من مربع بعد النقطــة عن المركز .

والمحور الأساسي لدائرتين هو المحل الهندسي للنقط المتساوية القوى بالنسبة لهما . ولذلك فان المحور الأساسي للدائرتين :

$$f_1(x, y) \equiv x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = o$$

$$f_2(x, y) \equiv x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = o$$

هو المستقيم :

$$f_1(x, y) = f_2(x, y)$$

أي :

$$(D_1 - D_2) x + (E_1 - E_2) y + F_1 - F_2 = 0$$

والمركز الأساسي لثلاث دوائر هو النقطة التي لها القوة نفسها بالنسبة للدوائر الثلاث ولذلك فان المحاور الأساسية الثلاثة للدوائر مأخوذة مثنى مثنى تتلاقى في نقطة واحدة هي المركز الأساسي .

٨ – نقول عن دائرتين إنهما متعامدتان إذا كانتا متقاطعتين وكان المماسان على كل منهما في نقطة التقاطع متعامدين . ولذلك فشرط التعامد هو أن يكون مربع البعد بين المركزين يساوي مجموع مربعي نصفي القطرين :

مسائل وتمارين محلولة

١٩٩ – اكتب معادلة الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC :

$$A (0 , 0) ; B (10 , 0) ; C (6 , 8)$$

الحــل :

إن الشكل العام لمعادلة دائرة هو :

$$x^2 + y^2 + a x + b y + c = 0$$

وحيث أن الدائرة تمر بالنقط A و B و C فان احداثيي كل من هذه لنقط تحقق معادلة الدائرة وبذلك نجد :

$$c = 0$$

$$100 + 10 a + c = 0$$

$$100 + 6 a + 8 b + c = 0$$

وبحل جملة المعادلات هذه نجد :

$$a = - 10 \quad ; \quad b = - 5 \quad ; \quad c = 0$$

فمعادلة الدائرة هي :

$$x^2 + y^2 - 10 x - 5 y = 0$$

أو نقول : استناداً إلى (٥) تكون المعادلة المطلوبة :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 100 & 10 & 0 & 1 \\ 100 & 6 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

وبنشر هذا المعين نجد :

$$80 (x^2 + y^2) - 800 x - 400 y = 0$$

أو :

$$x^2 + y^2 - 10 x - 5 y = 0$$

وهذه هي المعادلة السابقة نفسها .

٢٠٠ – ابحث عن نقط الدائرة .

$$x^2 + y^2 = 1$$

المتساوية البعد عن النقطتين $A (1 , 3)$ ، $B (- 2 , 2)$

الحـل :

إذا كانت (x , y) نقطة متساوية البعـد عن A و B فعندئـــذ يكون :

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

ومنه :

$$3 x + y = 1$$

وهذه هي معادلة المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن A و B (محور القطعة AB) .

والنقط المطلوبة هي عبارة عن الحل المشترك للمعادلتين :

$$3x + y = 1$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

بحل هاتين المعادلتين نجد النقط المطلوبة :

$$(0, 1) \quad ، \quad \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$$

٢٠١ - عين نقط تقاطع الدائرتين :

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 18 = 0 \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 - 8x - 12y + 42 = 0 \qquad (2)$$

الحـل :

نطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) فنجد (بعد الاختصار) ٠

$$x + y = 6 \qquad (3)$$

(وهذه معادلة المحور الأساسي للدائرتين وهو يمر بنقطتي تقاطع الدائرتين). نعوض y من (3) بما يساويها في (1) فنجد (بعد الاصلاح والاختصار) :

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

ومنه $x = 1$ أو $x = 3$ ، بالتعويض في (3) نجد أن نقطتي التقاطع هما :

$$(1, 5) \quad ; \quad (3, 3)$$

٢٠٢ - اكتب معادلة الدائرة التي مركزها النقطة $\omega(1, -2)$ والماسة المستقيم :

$$3x + 4y - 5 = 0$$

الحـل :

ان نصف قطر الدائرة هو بعد مركزها عن المماس ، أي :

$$r = \frac{|3 - 8 - 5|}{\sqrt{25}} = 2$$

فمعادلة الدائرة :

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

٢٠٣ — اكتب معادلة الدائرة المارة بالنقطتين $A(0, 2)$ و $B(0, 6)$ والمتعامدة مع الدائرة :

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \qquad (1)$$

الحـل :

يمكن كتابة المعادلة (1) بالشكل :

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

فمركز هذه الدائرة هو (2 و -1) ونصف قطرها 3 .

فإذا فرضنا (a, b) مركز الدائرة المطلوبة و r نصف قطرها ، وعلمنا أن البعد بين المركزين يساوي مجموع مربعي نصفي قطري الدائرتين المتعامدتين فعندئذ نجد :

$$(a - 2)^2 + (b + 1)^2 = r^2 + 9 \qquad (1)$$

وبما أن بعد كل من النقطتين A و B عن مركز الدائرة يساوي نصف قطرها يكون :

$$a^2 + (b - 2)^2 = r^2 \qquad (2)$$

$$a^2 + (b - 6)^2 = r^2 \qquad (3)$$

وبحل هذه المعادلات الثلاث نجد :

$$a = b = 4 \; ; \qquad r = \sqrt{20}$$

ومعادلة الدائرة المطلوبة هي :

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 20$$

٢٠٤ – أوجد المحل الهندسي للنقطة M التي مجموع مربعي بعديها عن نقطتين ثابتتين A و B يساوي مقداراً ثابتاً h^2 .

الحـل :

نبدأ أولاً باختيار المحاور الاحداثية بأبسط شكل ممكن ، فنضع محور السينات على AB ومحور العينات عمودي على القطعة AB في منتصفها . واذا فرضنا أن (A (a ، o فعندئذ يكون (B(– a ، 0 .

ليكن x و y احداثيي M . عندئذ يكون .

$$\overline{MA^2} + \overline{MB^2} = h^2$$

أو :

$$(x - a)^2 + y^2 + (x + a)^2 + y^2 = h^2$$

ومنه نجد :

$$x^2 + y^2 = \frac{h^2}{2} - a^2 \qquad (1)$$

وبالعكس كل نقطة (x ، y) تحقق (1) يكون مجموع مربعي بعديها عن A و B يساوي h^2 .

إن المعادلة (1) هي معادلة دائرة مركزها مبدأ الاحداثيات . يشترط لتكون هذه الدائرة حقيقية ان يكون $h^2 > 2a^2$.

٢٠٥ – اوجد المحل الهندسي للنقطة M التي نسبة بعديها عن

نقطتين ثابتتين A و B تساوي نسبة ثابتة k .

الحــل :

نختار محور السينات على المستقيم AB ومحور العينات محور القطعة AB . واذا فرضنا أن $A(h, o)$ فعندئذ يكون $B(-h, o)$.

ليكن x و y احداثيي M فعندئذ يكون :

$$MA^2 = (x - h)^2 + y^2 \quad ; \quad \overline{MB^2} = (x + h)^2 + y^2$$

ولكن : $\frac{MA}{MB} = k$ ؛ إذن :

$$(x - h)^2 + y^2 = k^2 [(x + h)^2 + y^2]$$

وبالاصلاح نجد :

$$x^2 + y^2 - 2 \frac{1 + k^2}{1 - k^2} h x + h^2 = o \qquad (1)$$

وبالعكس يمكن للقارىء أن يبرهن أن كل نقطة (x, y) تحقق (1) تكون نسبة بعديها عن A و B تساوي k .

فالمحل الهندمي هو الدائرة (1) .

٢٠٦ – لدينا المثلث ABC . أوجد تحليلياً المحل الهندسي للنقط M من المستوي بحيث تكون المساقط القائمة A' و B' و C' لـ M على اضلاع المثلث واقعة على استقامة واحدة (مستقيم سيمسون Simson) .

الحــل :

نختار المحاور بحيث يقع محور السينات على الضلع BC وينطبق محور

العينات على الارتفاع المتعلق بالنقطة A فعندئـــذ يمكن اعتبار رؤوس المثلث معينة بالاحداثيات التالية :

$$A(o, a) \; ; \; B(b, o) \; ; \; C(c, o)$$

وتكون معادلة أضلاع المثلث BC و AB و AC على الترتيب هي :

$$(1) \qquad y = o$$

$$(2) \qquad \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$$

$$(3) \qquad \frac{x}{c} + \frac{y}{a} = 1$$

ويكون مسقط النقطة $M(x_1, y_1)$ على الضلع BC هو :

$$m_1(x_1, o)$$

واما مسقط M على الضلع AB فيتعين بتقاطع الضلع AB مـــع الناظم من M على AB والذي معادلته (معادلة مستقيم مـــار بـ M ويوازي المنحى ($\frac{1}{a}$ ، $\frac{1}{b}$)) هي :

$$(4) \qquad b(x - x_1) = a(y - y_1)$$

بحل المعادلتين (2) و (4) نجد المسقط $m_2(x_2, y_2)$:

$$x_2 = \frac{b(a^2 + b x_1 - a y_1)}{b^2 + a^2} \; ; \quad y_2 = \frac{a(b^2 - b x_1 + a y_1)}{b^2 + a^2}$$

وباعادة الحسابات بالنسبة للضلع AC نجد أن المسقط $m_3(x_3, y_3)$ على AC هو :

$$x_3 = \frac{c (a^2 + c x_1 - a y_1)}{c^2 + a^2} \quad ; \quad y_3 = \frac{a (c^2 - c x_1 + a y_1)}{c^2 + a^2}$$

ولكي تقع النقط الثلاث m_1 و m_2 و m_3 على استقامة واحدة يلزم أن يكون :

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

أو (بفك المعين) :

$$(x_2 - x_1) y_3 + (x_1 - x_3) y_2 = 0$$

بالتعويض والاصلاح نجد المعادلة :

$$(5) \quad x_1^2 + y_1^2 - (b + c) x_1 - \frac{a_1^2 + c b}{a} y_1 + b c = 0$$

ويمكن بالعكس برهان أن مساقط كل نقطة من محيط الدائرة (٤) على أضلاع المثلث تقع على استقامة واحدة (نترك البرهان للقارىء) .

نلاحظ أن النقط A و B و C تقع على محيط الدائرة : فالمحل الهندسي المطلوب هو دائرة تمر برؤوس المثلث .

٢٠٧ — إذا فرضنا أن :

$$A (0 , a) \quad , \quad B (b , 0) \quad , \quad C (c , 0)$$

١ — أوجد معادلة الدائرة K_1 المارة برؤوس المثلث ACB .

٢ — أوجد نقطة تلاقي الارتفاعات H . برهن أن نظير H بالنسبة لـ BC يقع على K_1 .

٣ — أوجد معادلة الدائرة K_2 المارة بالمبدأ وبمنتصفي BC و AH .

برهن أن هـــذه الدائرة تمر بمنتصفي الضلعين AB و AC ومنتصفي BH و CH وبمسقط B على AC ومسقط C على AB .

٤ – برهن أن نصف قطر K_1 يساوي قطر K_2 .

الحـل :

١ – ان معادلة الدائرة K_1 هي :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ a^2 & o & a & 1 \\ b^2 & b & o & 1 \\ c^2 & c & o & 1 \end{vmatrix} = o$$

أي :

$$a (x^2 + y^2) - a (b + c) x - (a^2 + c b) y + a c b = o$$

٢ – من أجل إيجاد نقطة تلاقي الارتفاعات H نلاحظ أن هذه النقطة تقع على محور العينات ولذلك يكفي أن نعين ترتيبها h .

من أجل ذلك نلاحظ ان :

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} =$$

ومنــه :

$$- b c + h (- a) = o$$

$$h = \frac{- b c}{a}$$

ولذلك فان احداثيات نظير H بالنسبة لـ BC هي :

$$(o , \frac{b c}{a})$$

وهي تقع على الدائرة K_1 لأنه إذا بدلنا في معادلة الدائرة وجدنا :

$$a\left(\frac{b^2c^2}{a^2}\right)-(a^2+cb)\frac{bc}{a}+acb=o$$

٣ – لإيجاد معادلة الدائرة K_2 نلاحظ انها تمر بالنقط :

$$(o, o),\left(\frac{c+b}{2}, o\right),\left(o, \frac{a^2-bc}{2a}\right)$$

ولذلك فإن معادلتها هي :

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ o & o & o & 1 \\ \left(\frac{c+b}{2}\right)^2 & \frac{c+b}{2} & o & 1 \\ \left(\frac{a^2-bc}{2a}\right)^2 & o & \frac{a^2-bc}{2a} & 1 \end{vmatrix}$$

أي :

$$x^2+y^2-\frac{c+b}{2}x-\frac{a^2-bc}{2a}y=o$$

يلاحظ بسهولة ان منتصفات AB ، AC ، BH ، CH وهي :

$$\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right), \left(\frac{c}{2}, \frac{a}{2}\right), \left(\frac{b}{2}, \frac{-bc}{2a}\right), \left(\frac{c}{2}, \frac{-bc}{2a}\right)$$

تحقق المعادلة المفروضة .

للحصول على مسقط B على AC نعلم ان معادلة AC هي :

$$\frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1$$

ومعادلة الارتفاع النازل من B على AC هي :

$$c(x-b)-ay=o$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد :

$$x=\frac{c(a^2+bc)}{a^2+c^2} \quad ; \quad y=\frac{a(c^2-bc)}{a^2+c^2}$$

بالتبديل في معادلة الدائرة K_2 نجد أنها محققة وهذا يعني أن مسقط B على AC يقع على الدائرة المفروضة K_2 .

بنفس الطريقة نجد مسقط C على AB .

$$x=\frac{b(a^2+bc)}{a^2+b^2} \quad , \quad y=\frac{a(b^2-bc)}{a^2+b^2}$$

وبالتبديل في معادلة الدائرة K_2 نتأكد من أن مسقط C على AB يقع عليها .

٤ – يمكن كتابة معادلة الدائرة K_1 على الشكل :

$$\left(x-\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a^2+cb}{2a}\right)^2=$$

$$\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{a^2+cb}{2a}\right)^2-cb$$

وهذا يدلنا على أن مربع نصف قطر الدائرة هو :

$$R_1^2=\frac{a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2+a^4}{4a^2}$$

كما أنه يمكن كتابة معادلة الدائرة K^2 على الشكل :

$$\left(x - \frac{c+b}{4} \right)^2 + \left(y - \frac{a^2 - bc}{4a} \right)^2$$

$$= \left(\frac{c+b}{4} \right)^2 + \left(\frac{a^2 + cb}{2c} \right)^2$$

وهذا يدلنا على أن مربع نصف قطر الدائرة هو :

$$R_2^2 = \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + c^2 b^2 + a^2}{16 a^2}$$

ومنه نجد :

$$R_1^2 = 4 R_2^2$$

أو :

$$R_1 = 2 R_2$$

ومنه نرى أن نصف قطر الدائرة K_1 يساوي قطر الدائرة K_2 .

وهو المطلوب .

٢٠٨ – لدينـــا النقط $A(a, o)$ ، $B(b, o)$ ، $C(o,a)$ في المستوى المنسوب لمجموعة محورين متعامدين .

١ – لتكن M نقطة ما من ox . اكتب معادلة الدائرتين المارتين برؤوس المثلث ACM ، BCM .

٢ – احسب احداثيات مركزي الدائرتين ω_1 ، ω_2 ونصفي قطريهما R_1 و R_2 والبعد بين المركزين .

٣ – اذا تحركت M على ox برهن أن كـــلاً من ω_1 و ω_2

يرسم مستقيما وان النسبة $\frac{R_1}{R_2}$ تساوي كمية ثابتة .

٤ – اكتب معادلة خط المركزين Δ . برهن انه عندما تتحرك M يمر في كل نقطة من نقط المستوي مثل P مستقيمان Δ . أوجد المحل الهندسي لـ P عندما يتعامد المستقيمان Δ .

الحل :

لنرمز بـ λ لفاصلة النقطة M فعندئذ تكون معادلة الدائرة المارة برؤوس المثلث ACM هي :

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a^2 & 0 & a & 1 \\ a^2 & a & 0 & 1 \\ \lambda^2 & \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

او بعد نشر المعين والاختصار :

$$x^2 + y^2 - (\lambda + a)x - (\lambda + a)y + a\lambda = 0$$

بنفس الطريقة نجد معادلة BCM :

$$x^2 + y^2 - (\lambda + b)x - \frac{a^2 + b\lambda}{a}y + b\lambda = 0$$

٢ – من معادلتي الدائرتين نستنتج ان مركز الدائرة الاولى ω_1 هو :

$$\omega_1\left(\frac{\lambda + a}{2} \text{ ، } \frac{\lambda + a}{2}\right)$$

وان نصف قطرها :

$$R_1 = \sqrt{\frac{\lambda^2 + a_2}{2}}$$

واما مركز الدائرة الثانية ω_2 فهو يقع في النقطة :

$$\omega_2 \left(\frac{\lambda + b}{2} \text{ ، } \frac{a^2 + b\lambda}{2a} \right)$$

وأما نصف قطرها فهو :

$$R_2 = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)(\lambda^2 + a^2)}}{2a}$$

واما البعد بين المركزين فيتعين من دستور البعد بين نقطتين ويكون :

$$\overline{\omega_1 \omega_2}^2 = \left(\frac{\lambda + b}{2} - \frac{\lambda + a}{2} \right)^2 + \left(\frac{a^2 + b\lambda}{2a} - \frac{\lambda + a}{2} \right)^2$$

ومنه :

$$\overline{\omega_1 \omega_2}^2 = \frac{(a - b)^2}{4} \left(1 + \frac{\lambda^2}{a^2} \right)$$

٣ – اذا رمزنا لاحداثيي ω_1 بـ x_1 و y_1 فعندئذ يكون :

$$y_1 = x_1$$

وهذا يعني ان ω_1 ترسم مستقيما ماراً بالمبدأ .

واذا رمزنا لاحداثيي ω_2 بـ x_2 و y_2 فعندئذ يكون :

$$x_2 = \frac{b + \lambda}{2} \text{ , } y_2 = \frac{a}{2} + \frac{b}{2a} \lambda$$

وبحذف الوسيط من هاتين المعادلتين نجد المحل الهندسي لـ ω_2 وهو :

$$y = \frac{a^2 - b^2}{2a} + \frac{b}{a} x$$

وهذه معادلة مستقيم ميله $\frac{b}{a}$

وإذا حسبنا النسبة بين R_1 و R_2 وجدنا :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sqrt{2}\, a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

وهي نسبة ثابتة :

٤ – خط المركزين هو المستقيم المار بالنقطتين ω_1 و ω_2 ولذلك فان معادلته هي :

$$2ay - 2\lambda x + \lambda^2 - a^2 = 0$$

وإذا كانت $P(x_0, y_0)$ نقطة ما من المستوي فتكون واقعة على خط المركزين اذا كان :

$$\lambda^2 - 2\lambda x_0 + 2ay_0 - a^2 = 0$$

وهذه المعادلة (وهي من الدرجة الثانية بالنسبة لـ λ) تعين لنا بوجه عام قيمتين لـ λ يوافقها خطين مركزين مارين بـ P .

ويكون هذان المستقيان متعامدين إذا كان جداء الجذرين في المعادلة الاخيرة مساوياً لـ ١ – أي إذا كان :

$$2ay_0 - a^2 = -1$$

ومنه :

$$y_0 = \frac{a^2 - 1}{2a}$$

وهذه معادلة مستقيم مواز لمحور السينات :

٢٠٩ – لدينا النقطتان $A(a, o)$ ، $B(o, b)$ والدائرة K_1 التي مركزها النقطة (a, μ) والماسة لـ ox والدائرة K_2 التي مركزها النقطة (ν, b) والماسة لـ oy .

١ – أوجد معادلتي K_1 و K_2 ومعادلة محورهما الأسامي Δ .

٢ – اكتب شرط تعامد الدائرتين المذكورتين .

٣ – برهن انه إذا تحولت الدائرتان وبقيتا متعامدتين فمحورهما الأسامي Δ يمر بنقطة ثابتة .

الحل :

١ – لما كانت الدائرة K_1 تمس محور السينات فان نصف قطرها يساوي ترتيب مركزها ، ولذا فإن معادلتها هي :

$$(x - a)^2 + (y - \mu)^2 = \mu^2$$

ولما كانت الدائرة K_2 تمس محور العينات فان نصف قطرها يساوي فاصلة مركزها ، فمعادلتها هي :

$$(x - \nu)^2 + (y - b)^2 = \nu^2$$

وتكون معادلة المحور الاسامي لهاتين الدائرتين هي :

$$(x - a)^2 + (y - \mu)^2 - \mu^2 = (x - \nu)^2 + (y - b)^2 - \nu^2$$

أي :

$$(1) \qquad 2(\nu - a)x + 2(b - \mu)y + a^2 - b^2 = o$$

٢ – كي تتعامد الدائرتان K_1 و K_2 يلزم أن يكون مربع البعد بين المركزين مساوياً لمجموع مربعي نصفي القطرين :

$$(\nu - a)^2 + (b - \mu)^2 = \nu^2 + \mu^2$$

أو :

$$(2) \qquad 2a\nu + 2b\mu = a^2 + b^2$$

٣ – لنحسب قيمة ν من المعادلة (2) ولنعوضها في (1) فنجد بعد ترتيب المعادلة التي نحصل عليها بالنسبة لـ μ .

$$2(bx + ay)\mu + [(a^2 - b^2)x - 2aby - a(a^2 - b^2)] = o$$

ويلاحظ أن هذه المستقيمات « μ وسيط » تمر جميعها بنقطة تقاطع المستقيمين :

$$2(bx + ay) = o$$
$$(a^2 - b^2)x - 2aby - a(a^2 - b^2) = o$$

أي من النقطة :

$$x = \frac{a(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} \quad , y = \frac{b(b^2 - a^2)}{b^2 + a^2}$$

وهو المطلوب :

٢١٠ – برهن أن فضل مربعي مماسين مرسومين من نقطة P إلى دائرتين مفروضتين يساوي إلى ضعف حاصل ضرب البعد بين المركزين في بعد النقطة عن المحور الأساسي للدائرتين :

الحـل :

من المعلوم أن مربع طول مماس لدائرة ما يساوي قوة النقطة

بالنسبة لهذه الدائرة وإذا اتخذنا خط المركزين محوراً للسينات وافترضنا ان فاصلة مركز الأولى هو a وفاصلة مركز الثانية هو b فعندئـــذ تكون معادلتا الدائرتين هما :

$$x^2 + y^2 - 2ax + c_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2bx + c_2 = 0$$

ويكون الفضل بين مربعي مماسين مرسومين من نقطة $p(x_1, y_1)$ لهاتين الدائرتين هو :

$$(x_1^2 + y_1^2 - 2bx_1 + c_2) - (x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 + c_1) =$$
$$= 2(a-b)x_1 + c_2 - c_1 \qquad (1)$$

ولكن معادلة المحور الأساسي هي :

$$2(a-b)x + c_2 - c_1 = 0$$

أو :

$$x = \frac{c_1 - c_2}{2(a-b)}$$

ويكون بعد النقطة P عن هذا المستقيم هو .

$$x_1 - \frac{c_1 - c_2}{2(a-b)}$$

ولما كان البعد بين المركزين هو $(a-b)$ فإن ضعف حاصل ضرب بعد النقطة P عن المحور الأساسي في البعد بين المركزين هو :

$$2(a-b)x_1 + c_2 - c_1$$

وبالمقارنة مع (1) نجد صحة المطلوب .

٢١١ – أوجد المركز الاسامي للدوائر الثلاث :

$$x^2 + y^2 + 6x + 11y - 125 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 5y - 5 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 - 36 = 0 \quad (3)$$

ثم احسب أطوال المماسات من هذه النقطة للدوائر الثلاث .

الحـل :

ان المحور الاسامي للدائرتين (1) و (3) هو :

$$x^2 + y^2 + 6x + 11y - 125 - (x^2 + y^2 - 36) = 0$$

أو :

$$6x + 11y - 89 = 0 \quad (4)$$

بنفس الطريقة نجد المحور الاسامي للدائرتين (2) و (3) :

$$2x + 5y - 31 = 0 \quad (5)$$

المستقيمان (4) و (5) يتقاطعان بالنقطة :

$x = 13$ و $y = 1$

وهي المركز الاسامي المطلوب .

أما اطوال المماسات المرسومة من هذه النقطة للدوائر الثلاث فهي متساوية لأنها تساوي قوة النقطة بالنسبة لكـــل من الدوائر الثلاث . وعلى هذا فاننا نحصل على مربع طول المماس بتبديل احداثيات المركز الاساسي في الطرف الايسر من واحدة من معادلات الدوائر الثـلاث (1) و (2) و (3) :

$$169 + 1 - 36 = 134$$

وطول المماس إذن : $\sqrt{134}$

٢١٢ – اكتب معادلة الدائرة التي مركزها يقع على المستقيم :

$$2x + 3y = 0 \quad (1)$$

وتمس المستقيمين :

$$4y - 3x - 8 = 0 \quad (2)$$

$$4y + 3x + 24 = 0 \quad (3)$$

في الزاوية التي تحوي نقطة الأصل :

٢ – اوجد معادلات المماسات لهذه الدائرة الموازية للمستقيم .

$$2x + 5y - 7 = 0$$

٣ – أوجد معادلات المماسات لهذه الدائرة من نقط تقاطعها مع محور السينات .

٤ – اوجد معادلات المماسات لهذه الدوائر التي تمر بالنقطة (5 ، 3 –).

الحـل :

١ – اذا افترضنا a و b احداثيات مركز الدائرة فانه يكون :

$$2a + 3b = 0 \quad (4)$$

وذلك لأن المركز يقع على المستقيم (1) .

ولما كان المستقيمان (2) و (3) يمسان الدائرة فان مركزها يقع على احد منصفات الزاوية الحادثة بينهما . ومعادلات هذه المنصفات هي:

$$\frac{4y-3x-8}{\sqrt{25}}=\pm\frac{4y+3x+24}{\sqrt{25}}$$

أي :

$$x=\frac{-16}{3}$$

و

$$y=-2$$

ولكن المنصف الذي يقع مع نقطة الاصل في نفس الزاوية هو :

$$y=-2$$

وهكذا نجد انه يلزم أن يكون :

$$b=-2$$

من المعادلة (4) نجد :

$$a=3$$

واما نصف قطر الدائرة فيساوي بعد مركزها عن احد المماسات :

$$R=\frac{|4(-2)-3(3)-8|}{\sqrt{25}}=5$$

ومعادلة الدائرة المطلوبة هي :

$$(x-3)^2+(y+2)^2=25$$

أو :

$$x^2+y^2-6x+4y-12=0$$

٢ – ان معادلات المماسات المطلوبة هي من الشكل .

$$2x+5y+h=0 \qquad (5)$$

بالتعويض في معادلة الدائرة كل y بما يساويها بدلالة x من المعادلة

الاخيرة ثم بالترتيب بالنسبة لـ x نجد :

$$29 x^2 + 2 (2 h - 95) x + h^2 - 20 h - 300 = 0$$

وحتى يكون (5) مماساً للدائرة المفروضة يلزم أن ينعدم مميز المعادلة الاخيرة :

$$(2 h - 95)^2 - 29 (h^2 - 20 h - 300) = 0$$

ومنه نجد :

$$h = 4 \mp 5 \sqrt{29}$$

فالمماسان المطلوبان هما :

$$2 x + 5 y + 4 \mp 5 \sqrt{29} = 0$$

٣ ــ للحصول على نقط تقاطع محور السينات مع الدائرة ، نعوض كل y بصفر فنجد :

$$x^2 - 6 x - 12 = 0$$

ومنه :

$$x = 3 \mp \sqrt{21}$$

ولما كانت معادلة المماس للدائرة المفروضة في نقطة (x_1 , y_1) واقعة عليها هي :

$$x_1 x + y_1 y - 3 (x + x_1) + 2 (y + y_1) - 12 = 0$$

فمن اجل نقطتي التقاطع .

$$(3 + \sqrt{21} , 0) \quad ، \quad (3 - \sqrt{21} , 0)$$

نجد المعادلتين الآتيتين :

$$2y + \sqrt{21}\,x = 21 + 3\sqrt{21}$$

$$2y - \sqrt{21}\,x = 21 - 3\sqrt{21}$$

٤ – ان المعادلات الوسيطية للمستقيم المار بالنقطة $(-3, 5)$ والذي امثال توجيهه (α, β) هي :

$$\begin{cases} x = -3 + \alpha\varrho \\ y = 5 + \beta\varrho \end{cases} \qquad (6)$$

لنعين α و β على شكل يكون فيه المستقيم (6) مماساً للدائرة لنعوض في معادلة الدائرة ولنرتب بالنسبة لـ ϱ فنجد :

$$(\alpha^2 + \beta^2)\varrho^2 + 2(7\beta - 6\alpha)\varrho + 60 = 0$$

ويكون لهذه المعادلة جذر مضاعف إذا كان :

$$(7\beta - 6\alpha)^2 - 60(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

فاذا اصلحنا هذه المعادلة وقسمنا الطرفين على α^2 ولاحظنا أن ميل المماس المطلوب هو $m = \frac{\beta}{\alpha}$ وجدنا :

$$11m^2 + 84m + 24 = 0$$

ومنه :

$$m = \frac{-42 \pm 10\sqrt{15}}{11}$$

وتكون المعادلات المطلوبة هي :

$$\frac{y - 5}{x + 3} = \frac{-42 \pm 10\sqrt{15}}{11}$$

٢١٣ – اكتب معادلات المماسات المشتركة للدائرتين :

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 16y + 60 = 0$$

واحسب احداثيات نقط التماس :

الحــل :

إذا رمزنا بـ ω_1 و ω_2 لمركزي الدائرتــين و R_1 و R_2 لنصفي قطريهما كان :

$$\omega_1(0, 0) \quad , \quad \omega_2(0, 8)$$

$$R_1 = 5 \quad , \quad R_2 = 2$$

لنفرض أن معادلة المماس هي من الشكل :

$$y = mx + h \qquad (1)$$

لنكتب الآن أن بعـد كل من المركزين عن المماس (١) يساوي نصف قطر الدائرة الموافق :

$$h^2 = 25(1 + m^2) \qquad (2)$$

$$(8 - h)^2 = 4(1 + m^2) \qquad (3)$$

من (2) و (3) نجد :

$$4h^2 = 25(8 - h)^2$$

ويكون :

$$h_1 = \frac{40}{3} \quad ، \quad h_2 = \frac{40}{7}$$

بالتعويض بالمعادلة (2) نجد :

$$m = \pm \frac{\sqrt{55}}{3} \; ; \; m = \pm \frac{\sqrt{15}}{7}$$

وتكون بالتالي معادلات المماسات الأربعة هي :

$$y = \mp \frac{\sqrt{55}}{3} x + \frac{40}{3}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{15}}{7} x + \frac{40}{7}$$

وأما نقط التماس فهي النقط المشتركة بين كل من الدائرتين والمستقيمات الأربعة .

ولذلك نحل معادلة كل من الدائرتين مع المستقيمات الأربعة على التوالي فنجد نقط التماس الثمانية .

ولكنه يمكن بطريقة ثانية الوصول إلى نفس النتيجة وذلك إذا لاحظنا أن المماس عمودي على نصف القطر في نقطة التماس . وحيث أن ميل المماس (1) هو m فيكون ميل نصف القطر الموافق $-\frac{1}{m}$ وتكون معادلة نصف القطر الموافق للدائرة الأولى هي :

$$y = -\frac{1}{m} x$$

ونقط تقاطعه مع المماس (1) هي :

$$\left(\frac{-mh}{1+m^2} \quad ، \quad \frac{h}{1+m^2} \right)$$

فنقط التماس الأربع على الدائرة الأولى هي :

$$\left(-\frac{5\sqrt{55}}{8} ، \frac{15}{8} \right) ، \left(\frac{5\sqrt{55}}{8} ، \frac{15}{8} \right)$$

$$\left(-\frac{5\sqrt{15}}{8} ، \frac{35}{8} \right) ، \left(\frac{5\sqrt{15}}{8} ، \frac{35}{8} \right)$$

وتكون معادلة نصف القطر الموافق للدائرة الثانية هي :

$$y = 8 - \frac{1}{m} x$$

ونقط تقاطعه مع المماس (1) هي :

$$\left(\frac{m(8-h)}{1+m^2} ، \frac{h+8m^2}{1+m^2} \right)$$

وتكون نقط التماس الاربع على الدائرة الثانية :

$$\left(-\frac{\sqrt{55}}{4} , \frac{35}{4} \right) \quad ، \quad \left(\frac{\sqrt{55}}{4} , \frac{35}{4} \right)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{15}}{4} , \frac{25}{4} \right) \quad ، \left(+\frac{\sqrt{15}}{4} , \frac{25}{4} \right)$$

٢١٤ – لدينا الدائرة :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = o$$

P نقطة ما على هذه الدائرة و P' نقطـــة على المستقيم OP تحقق العلاقة :

$$OP \cdot OP' = k^2 \qquad (1)$$

ماهو المحل الهندسي للنقطة P' عندما ترسم P محيط الدائرة المفروضة.
ميز حسب القيم المختلفة لـ c .

الحـــل :

لنكتب معادلة الدائرة المفروضة في الاحداثيات القطبية متخذين مبدأ المحاور قطباً ومحور السينات محوراً قطبياً فعندئذ يكون ، إذا رمزنا بـ r و φ للاحداثيات القطبية للنقطة P .

$$x = r \cos \varphi \quad , \quad y = r \sin \varphi$$

بالتعويض في معادلة الدائرة نجد :

$$r^2 - 2r(a \cos \varphi + b \sin \varphi) + c = o \qquad (2)$$

واستناداً إلى (1) يكون ، اذا رمزنا بـ (r_1 , φ_1) للاحداثيات القطبية للنقطة P :

$$r r_1 = k^2$$

بالتعويض في (2) يكون :

$$c r_1^2 - 2k^2 r_1 (a \cos \varphi_1 + b \sin \varphi_1) + k^4 = o$$

فاذا كان $c = o$ فعندئذ يكون :

$$2r_1 (a \cos \varphi_1 + b \sin \varphi_1) = k^2$$

أو :

$$2a x_1 + 2b y_1 = k^2$$

وهذه معادلة مستقيم .

أما إذا كان $c \neq o$ فعندئذ يكون المحل الهندسي للنقطة P .

$$x_1^2 + y_1^2 - 2\frac{k^2}{c}(a\,x_1 + b\,y_1) + k^4/c = o$$

وهذه معادلة دائرة .

إننا ندعو النقطة P' النقطة المعاكسة لـ P بنسبة تعاكس k ومركز تعاكس هو نقطة الأصل . ومن المسألة نستنتج أن المنحني المعاكس لدائرة هو مستقيم أو دائرة حسبما يقع مركز التعاكس على محيط الدائرة $(c = o)$ أو لايقع .

ومن التعريف (1) نرى أن النقطة المعاكسة لـ P' هي P نفسها ، ولذلك نستنتج أن المنحني المعاكس لمستقيم هو المستقيم نفسه أو دائرة حسبما يمر المستقيم في مركز التعاكس أو لايمر .

۲۱٥ — لدينا الدائرتان K_1 و K_2 المتقاطعتان في النقطتين P و Q ولدينا مستقيم g يمر بالنقطة P . برهن أنه يوجد في الحالة العامة أربع دوائر تمس كلًا من K_1 و K_2 و g .

الحـل :

إذا اتخذنا النقطة P مركزاً للتعاكس فان المنحنيات المعاكسة للدوائر K_1 و K_2 تكون عبارة عن مستقيمين متقاطعين لايمران في P . ويكون المنحني المعاكس لـ g هو مستقيم يمر في P .

وأما المنحني المعاكس للدائرة المطلوبة K فهو بالحالة العامة عبارة عن دائرة تمس المستقيمات الثلاثة . ولما كانت المستقيمات الثلاثة تشكل مثلثاً

فانه يوجد أربع دوائر تمس أضلاع المثلث . وتكون المنحنيات المعاكسة لهذه الدوائر الأربع عبارة عن أربع دوائر تشكل حلول المسألة المطلوبة .

مسائل وتمارين غير محلولة

٢١٦ – أوجد معادلة الدائرة المارة برؤوس المثلث المتشكل من المستقيمات الثلاثة .

$$3x + y - 22 = 0 \quad ، \quad 2x + y - 14 = 0$$

$$x + y - 8 = 0$$

٢١٧ – أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (1 , 2 −) وتمس المستقيم

$$3x - 2y - 6 = 0$$

في النقطة : (4 , 3)

٢١٨ – لدينا المثلث $A(5,0)$ و $B(1,2)$ و $C(3,2)$. D و E و F هي منتصفات أضلاع المثلث . برهن أن نصف قطر الدائرة ABC هو ضعف نصف قطر الدائرة DEF .

٢١٩ – أوجد معادلتي الدائرتين الماستين للمستقيمين .

$$4x + 3y - 7 = 0 \quad و \quad 3x - 4y + 1 = 0$$

والمارتين من النقطة (2 , 3) .

٢٢٠ – اوجد معادلة الدائرة المرسومة داخل المثلث المعين بتقاطع المستقيمات :

$$3x + 4y - 5 = 0$$

$$7x - 24y + 55 = 0$$

$$4x - 3y - 65 = 0$$

٢٢١ — أوجد معادلة الدائرة المرسومة ضمن المثلث الذي رؤوسه :

$$\left(\frac{31}{5}, 0\right), (-1, 3), (3, 6)$$

٢٢٢ — برهن أن المستقيم $4x + 2y = 15$ يمس الدائرة :

$$4(x-2)^2 + 4(y-1)^2 = 5$$

عين نقطة التماس :

٢٢٣ — عين الدائرة المارة برؤوس المثلث المعين بتقاطع المستقيمات :

$$4x + y - 17 = 0$$

$$2x + 3y - 1 = 0$$

$$x - y + 2 = 0$$

٢٢٤ — برهن أن الدائرتين :

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x + 7 = 0$$

متقاطعتان ، ثم عين نقطتي تقاطعهما .

٢٢٥ — برهن أن الدائرتين :

$$x^2 + y^2 - ax = 0$$

$$x^2 + y^2 - by = 0$$

متعامدتان مهما كانت قيم a و b .

٢٢٦ — برهن ان كل دائرة (a و b وسيطان) :

$$x^2 + y^2 - 2ax + b^2 = 0$$

تتعامد مع كل دائرة (c و b وسيطان) :

$$x^2 + y^2 - 2cy - b^2 = 0$$

٢٢٧ – أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (2 ، 1 –) وتتعامد مع كل من الدائرتين :

$$x^2 + y^2 = 6y \quad ; \quad x^2 + y^2 - 4x - 4y = 1$$

٢٢٨ – عين نقط محور السينات التي يكون طول المماس المنشأ منها على الدائرة :

$$x^2 + y^2 - 6y + 6 = 0$$

مساوياً طول المماس المنشأ على الدائرة :

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

٢٢٩ – لدينا الدائرتان :

$$x^2 + y^2 - 3x + 5y - 2 = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 1 = 0$$

اوجد معادلة المحور الاسامي لهما . ثم عـــين نقط محور العينات المتساوية القوى بالنسبة للدائرتين المفروضتين

٢٣٠ – أوجد نقطتي تقاطع الدائرة :

$$r = 4\cos\varphi$$

مع المستقيم $r\cos\varphi = 3$

ثم برهن أن هاتين النقطتين مع نقطة الأصل تشكل مثلثاً متساوي الساقين .

الاجوبة

٢١٦ - $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

٢١٧ - $(x + \frac{2}{7})^2 + (y - \frac{41}{7})^2 = \frac{1300}{49}$

٢١٩ - $(x - \frac{6}{5})^2 + (y - \frac{12}{5})^2 = 1$

٢٢٠ - $x^2 + y^2 - 20x + 75 = 0$

٢٢٢ - $(3 , 1\frac{1}{2})$

٢٢١ - $7x^2 + 7y^2 - 34x - 48y + 103 = 0$

٢٢٣ - $5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y - 34 = 0$

٢٢٤ - $(\frac{14}{13} , -\frac{21}{13}) ; (8 , 3)$

٢٢٦ - $(-3 , 0)$

٢٢٧ - $4(x + 1)^2 + (2y + 3)^2 = 49$

٢٢٨ - $2x + 6y = 3$

٢٢٩ - $y = \frac{1}{2}$

٢٣٠ - $(2\sqrt{3} , \frac{\pi}{6}) (2\sqrt{3} , \frac{-\pi}{6})$

الفصل السادس

الكرة والدائرة في الفراغ

١ – الكرة هي المحل الهندسي للنقط في الفراغ التي تبعد عن نقطـة ثابتة (تسمى مركز الكرة) بعداً ثابتاً (يسمى نصف قطر الكرة) . فـاذا كان $\omega(a , b , c)$ مركز الكرة و R نصف قطرها فعندئذ تكون معادلتها :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

وبالعكس كل معادلة من الشكل :

$$(1) \quad f(x , y , z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2Bx + 2Cy + 2Dz + E = 0$$

تمثل كرة مركزها $\omega(-B , -C , -D)$ ونصف قطرهـا $\sqrt{B^2 + C^2 + D^2 - E}$. ولذلك فان هذه الكرة لاتكون حقيقية إلا إذا كان $B^2 + C^2 + D^2 > E$.

٢ – المعادلات الوسيطية لسطح كرة نصف قطرها R ومركزهـا $\omega(a , b , c)$ هي :

$$x = a + R \sin\Theta \cos\varphi \quad , \quad y = b + R \sin\Theta \sin\varphi$$

$$z = c + R \cos\Theta$$

٣ – كل مستو في الفراغ اما ان يكون قاطعاً للكرة او مماسا في نقطة او خارجاً عنها حسبا يكون بعد مركز الكرة عنه اصغر او يساوي او اكبر من نصف القطر .

٤ – من اجل ايجاد معادلة المستوي المماس لكرة مـــار من مستقيم معلوم نشكل حزمة المستويات المارة من المستقيم ونعين احدها الذي يبعد عن مركز الكرة بمقدار نصف قطرها .

ومن أجل ايجاد معـــادلة المستوي المماس الموازي لمستو معلوم نشكل معادلة المستويات الموازية لهذا المستوي ونعين احدها الذي يبعد عن مركز الكرة بمقدار نصف قطرها .

والمستوي المماس لكرة في نقطة عليها هو المستوي المار بالنقطة والعمودي على نصف قطر الكرة الواصل الى نقطة التماس .

٥ – قوة النقطة $P(x_o , y_o , z_o)$ بالنسبة لكرة هو حاصل ضرب القياس الجبري للقطعتين اللتين تبدآن بالنقطة P وتنتهيان بنقط تقاطع محور متحول مار بالنقطة P مع الكرة ، وتقدر قوة النقطة P بالنسبة لـ (1) بـ $f(x_o , y_o , z_o)$.
والمستوي الاساسي لكرتين هو المحل الهندسي للنقط المتساوية القوى بالنسبة لهما .

٦ – شرط تعامد كرتين هو أن يكون مجموع مربعي نصفي قطريهما يساوي البعد بين مركزيهما وتكون الكرتان متماستين خارجاً (أو داخلاً) إذا كان البعد بين المركزين يساوي مجموع (فضل) نصفي قطريهما .

٧ – المستويات المماسة المشتركة لكرتين هي المستويات المماسة لإحداهما والمنبعثة من نقطتين A و B وهما النقطتان القاسمتان للقطعة المستقيمة الواصلة بين المركزين تقسيماً توافقياً بنسبة نصفي قطري الكرتين .

٨ – اذا كان لدينا كرة معادلتها $S = o$ ومستو معادلته $P = o$ فان المعادلة $S + \lambda P = o$ تمثل حزمة كرات تمر جميعها بدائرة تقاطع الكرة المفروضة مع المستوي المفروض .

٩ – الدائرة في الفراغ هي تقاطع مستو مع كرة فهي تتعين بمعادلتين احداهما تمثل مستوياً والثانية تمثل كرة . وإذا كان بعد مركز الكرة عن المستوي d فعندئذ يكون نصف قطر الدائرة r معطى بالعلاقة :

$$r^2 = R^2 - d^2$$

مسائل وتمارين محلولة

٢٣١ – اكتب معادلة الكرة المارة برؤوس رباعي الوجوه المعين بمعادلات وجوهه :

$$x = o \ ، \ y = o \ ، \ z = o \ ، \ 2x + 3y + 6z = 6$$

الحـل :

ان المستويات الأربعة تتقاطع في النقط .

$$(0, 0, 0) ، (0, 0, 1) ، (0, 2, 0) , (3, 0, 0)$$

بالتعويض في (١) نجد :

$$E = o \ ، \ 1 + 2D = o \ , \ 4 + 4C = o \ ، \ 9 + 6B = o$$

ومنه :

$$B = -\frac{3}{2} \ , C = -1 \ , D = -\frac{1}{2} \ , \ E = o$$

والمعادلة المطلوبة هي :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 2y - z = o$$

٢٣٢ – أوجد نصف قطر الدائرة المعينة بالمعادلتين :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 5 = o \qquad (1)$$

$$2x - 8y + 7z - 4 = o \qquad (2)$$

الحـل :

يمكن كتابة معادلة الكرة (١) بالشكل :

$$(x - 3)^2 + (y - o)^2 + (z - o)^2 = 14$$

فمركزها $(3, 0, 0)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{14}$

ان بعد مركز الكرة عن المستوي (2) هو :

$$d = \frac{|6 - 4|}{\sqrt{117}} = \frac{2}{\sqrt{117}}$$

فنصف قطره الدائرة r يتعين بالعلاقة :

$$r^2 = R^2 - d^2 = 14 - \frac{4}{117} = \frac{1634}{117}$$

٢٣٣ – اكتب معادلة المستوي المماس للكرة :

$$2(x^2 + y^2 + z^2) - 3x + 4y - z - 60 = 0$$

في النقطة $M(1, -4, 5)$.

الحـل :

نلاحظ ان النقطة M واقعة على سطح الكرة ، كما أننا نجد بسهولة ان مركز الكرة يقع في النقطة $\omega(\frac{3}{4}, -1, \frac{1}{4})$ وان أمثال توجيه نصف القطر $M\omega$ هي : $(1, -12, 19)$.

ولما كان المستوي المماس هو المستوي المار بالنقطة M والعمودي على $M\omega$ فمعادلته اذن : $(x - 1) - 12(y + 4) + 19(z - 5) = 0$

أو :

$$x - 12y + 19z = 144$$

٢٣٤ – أوجد معادلة المستويين المارين من المستقيم $x = y = z$ والماسين للكرة المعينة بالمعادلة :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 7 = 0$$

ثم برهن أنهما متعامدان :

الحــل :

ان المستقيم المفروض هو الفصل المشترك للمستويين :

$$\begin{cases} x - y = o \\ x - z = o \end{cases}$$

ولذلك فان حزمة المستويات المارة بهذا المستقيم هي :

$$(1 + \lambda) x - y - \lambda z = o \qquad (1)$$

والمستويات المطلوب هي تلك المستويات من (1) التي يكون بعدها عن مركز الكرة مساوياً لنصف قطر الكرة وبما أن مركز الكرة هو (3 , 2 - , 1 -) ونصف قطرها $\sqrt{7}$ فانه يكون :

$$\frac{(-1 - \lambda + 2 - 3\lambda)^2}{(1 + \lambda)^2 + 1 + \lambda^2} = 7$$

ومنه :

$$\lambda = \frac{11 \mp \sqrt{147}}{2}$$

ومعادلتا المستويين الماسين هما :

$$\left(1 + \frac{11 + \sqrt{147}}{2}\right) X - Y - \frac{11 + \sqrt{147}}{2} Z = o$$

$$\left(1 + \frac{11 - \sqrt{147}}{2}\right) X - Y - \frac{11 - \sqrt{147}}{2} Z = o$$

والمستويان متعامدان لأن :

$$\left(1 + \frac{11 + \sqrt{147}}{2} \right) \left(1 + \frac{11 - \sqrt{147}}{2} \right) + 1$$

$$+ \left(\frac{11 + \sqrt{147}}{2} \right) \left(\frac{11 - \sqrt{147}}{2} \right) = 0$$

٢٣٥ – اكتب معادلة المستوي الأساسي للكرتين :

$$2 (x^2 + y^2 + z^2) - 3 x = 0$$

$$5 (x^2 + y^2 + z^2) + 2 y - 1 = 0$$

الحـل :

نضع الطرف الأول من المعادلة الاولى بعد تقسيمه على 2 مساوياً للطرف الأول من المعادلة الثانية بعد تقسيمه على 5 فنجد :

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{2}x = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2 y}{5} - \frac{1}{5}$$

ومنه معادلة المستوي الاساسي :

$$15 x + 4 y - 2 = 0$$

٢٣٦ – اكتب معادلة الكرة المرسومة ضمن رباعي الوجوه المعين بالمعادلات :

$$x + y + z = 1 \quad , \quad x + y = 0$$

$$z + x = 0 \qquad y + z = 0$$

الحـل :

إذا فرضنا أن $\omega (a , b , c)$ مركز الكرة و R نصف قطرها وإذا كتبنا ان بعد هذا المركز عن كل من المستويات الأربعة مساو

لنصف القطر نجد :

$$\frac{|a+b+c-1|}{\sqrt{3}} = \frac{|a+b|}{\sqrt{2}} = \frac{|a+c|}{\sqrt{2}} = \frac{|b+c|}{\sqrt{2}} = R$$

وهذه العلاقات تعطينا عدداً من الحلول نقبل منها الحل :

$$a = b = c = \frac{1}{3+\sqrt{6}} \;,\; R = \frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{6}}$$

وذلك لأن الكرة المطلوبة هي الكرة المرسومة ضمن رباعي الوجوه ، وهذا يعني أن على مركزها أن يقع في جانب واحـــد مع كل رأس بالنسبة للمستوي المقابل له . فرؤوس رباعي الوجوه هي :

$$(0, 0, 0) ، (-1, 1, 1) ، (1, -1, 1) ، (1, 1, -1)$$

فمثلاً بالنسبة للمستوي $x+y+z-1=o$ يقع الرأس المقـــابـل $(0, 0, 0)$ والمركز بجانب واحد لأن كلا من هاتين النقطتين ذو قوة تحليلية سالبـــة بالنسبة للمستوي المفروض ونفس الأمر بالنسبة للرؤوس الأخرى .

ان معادلة الكرة المطلوبة اذن :

$$\left(x-\frac{1}{3+\sqrt{6}}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3+\sqrt{6}}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3+\sqrt{6}}\right)^2=\frac{2}{(3+\sqrt{6})^2}$$

٢٣٧ — احسب الزاوية الحاصلة من تقاطع كرتين واستنتج شرط التعامد بينهما .

الحـل :

ان الزاوية الحاصلة عند التقاطع هي الزاوية الحاصلة بين المستويـين

المماسين المنشأين في نقطة من نقاط التقاطع على الكرتين المذكورتين .
وبما أن أنصاف الأقطار عمودية على المستويات المماسة في نقاط التماس .
اذن يكفي أن نحسب الزاوية بين نصفي القطرين اللذين يصلان المركز
باحدى نقط التقاطع مثل P فاذا كانت هذه الزاوية Θ وكان
$\omega (a , b , c)$، $\omega' (a' , b' , c')$ مركزي الكرتين و R و R' نصفي
قطريهما فانه يكون عندئذ « من المثلث $P \omega \omega'$ » :

$$\overline{\omega \omega'^2} = R^2 + R'^2 - 2 R . R' \cos \Theta$$

$$2 R R' \cos \Theta = R^2 + R'^2 - (a - a')^2 - (b - b')^2 \quad (c - c')^2$$

وتتعامد الكرتان إذا كان $\Theta = \frac{\pi}{2}$ أي $\cos \Theta = 0$ ومنه نستنتج
أن شرط التعامد هو أن يكون مربع البعد بين المركزين مساوياً
لمجموع مربعي نصفي القطرين .

٢٣٨ — اكتب معادلة الكرة المارة بالدائرة .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

والمماسة للكرة $x^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 1$

الحل :

ان مركز الكرة يقع على العمود المنشأ على مستوي الدائرة من مركزها:
ولما كان مركز الدائرة يقع في النقطة $(0 , 0 , 0)$ ولما كان العمودي
على مستويها هو المحور oz فان مركز الكرة يقع على المحور oz
فاذا فرضنا ان احداثيات المركز هي $(0 , 0 , \mu)$ فعندئذ يكون

نصف قطر الكرة R هو البعد بـــين مركـــزها واحدى نقط الدائرة ولتكن تلك النقطة (5 , 0 , 0)إذن : $R^2 = 25 + \mu^2$

ومن جهة اخرى لما كانت الكرة الثانية مماسة للكرة المطلوبة فـان البعد بين المركزين يساوي مجموع نصفي القطرين اي :

$$\sqrt{0+4+(1-\mu)^2} = 1 + \sqrt{25+\mu^2}$$

وبحل هذه المعادلة نجد :

$$R^2 = 25 + \left(\frac{341}{84}\right)^2 \qquad : \qquad \mu = \frac{-341}{84}$$

وتكون معادلة الكرة المطلوبة :

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{341}{42} z = 25$$

٢٣٩ – أوجد المحل الهندسي لمركز الكرة المارة بالنقطتين الثابتتين $P(a , b , o)$ و $P'(a' , b' , o)$ والمتعامدة مع الكرة :

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = o \qquad (1)$$

الحـــل :

إذا فرضنا (X , Y , Z) هو مركز الكرة وإذا كتبنا أن بعـد هذا المركز عن النقطة P يساوي بعدها عن النقطة P′ نجد :

$$X-a)^2+(Y-b)^2+Z^2=(X-a')^2+(Y-b')^2+Z^2 \qquad (2)$$

نكتب بعد ذلك أن مجموع مربعي نصفي قطري الكرتين يساوي مربع البعد بين المركزين نجد :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 + R'^2 \qquad (3)$$

ومن (2) و (3) نجد :

$$2\,a'\,X + 2\,b'\,Y = a'^2 + b'^2 + R^2 \qquad (4)$$
$$2\,a\,X + 2\,b\,Y = a^2 + b^2 + R^2$$

ويتقاطع المستويات (4) بمستقيم مواز لـ oz هو المحل الهندسي المطلوب .

٢٤٠ – برهن ان الدائرتين

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + 4z - 5 = 0 \;; \quad 5y + 6z + 1 = 0$$
$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 4y + 5z - 6 = 0 \;; \quad x + 2y - 7z = 0$$

تقعان على كرة . أوجد معادلة هذه الكرة .

الحـل :

ان معادلة حزمة الكرات المارة بالدائرة (1) هي :

$$(3) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + (3 + 5\lambda)\,y + (4 + 6\lambda)\,z - 5 + \lambda = 0$$

ومعادلة حزمة الكرات المارة بالدائرة (2) هي :

$$(4) \; x^2 + y^2 + z^2 + (-3 + \mu)x + (-4 + 2\mu)\,y + (5 - 7\mu)\,z - 6 - 0$$

وكي تقع الدائرتان على كرة واحدة يجب ان نتمكن من ايجاد قيمة لـ λ وقيمة لـ μ تجعلان المعادلة (3) هي المعادلة (4) نفسها . ان هـذا الأمر يتطلب أن يكون :

$$-2 = -3 + \mu \;; \quad 3 + 5\lambda = -4 + 2\mu$$
$$4 + 6\lambda = 5 - 7\mu \;; \quad -5 + \lambda = -6$$

ولهذه المعـــادلات الحل المشترك $\mu = 1 \;;\; \lambda = -1$ فالدائرتان

تقعان على كرة واحدة نحصل عليها بتعويض $\lambda = -1$ في (3) أو $\mu = 1$ في (4) فنجد :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$$

٢٤١ – اكتب معادلة الدائرة المارة بالنقط الثلاث $A(a, 0, 0)$ ، $B(0, b, 0)$ ، $C(0, 0, c)$ واحسب نصف قطرها :

الحل :

تتعين الدائرة المطلوبة بتقاطع المستوي المـــار من النقط الثـلاث A ، B ، C وباحدى الكرات التي تمر بهذه النقط الثلاث ولتكن تلك التي تمر بالاضافة إلى A ، B ، C بنقطة الاصل « شريطة أن يكون $a . b . c \neq 0$ » .

أما معادلة المستوي فهي :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

وأما معادلة الكرة فهي :

$$x^2 + y^2 + z^2 - a x - b y - c z = 0$$

ومن أجل حساب نصف قطر الدائرة نحسب نصف قطر الكرة وبعد مركزها عن المستوي فيكون استناداً إلى (6) :

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - \frac{a^2 b^2 c^2}{4(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)}$$

مسائل وتمارين غير محلولة

٢٤٢ – أوجد معادلة الكرة التي تكون فيها الدائرة المعينة بالمعادلتين :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0$$

$$2x + 3y + 4z = 8$$

دائرة عظمى لها :

٢٤٣ – لدينا المستوي المار بالنقطة الثابتة (a , b , c) والقاطع للمحاور الاحداثية في النقط A و B و C . برهن أن الحل الهندسي لمركز الكرات OABC هو :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$$

٢٤٤ – أوجد معادلة الكرة المارة بالدائرة :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 1 = 0 ; \quad x + y - z - 1 = 0$$

وبنقطة الأصل .

٢٤٥ – برهن أن معادلات الكرات المارة بالنقط (4 . 1 , 0) ، (2 , - 3 , 4) ، (1 , 0 , 0) والماسة للمستوي $2x + 2y - z = 11$ هي :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$$

$$16(x^2 + y^2 + z^2) - 10\,2x + 50y - 49z + 86 = 0$$

٢٤٦ – برهن أن نصف قطر الدائرة :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2\omega z + d = 0 \\ lx + my + nz = 0 \end{cases}$$

وليكن r يحقق العلاقة :

$$(r^2 + d)(l^2 + m^2 + n^2) = (mw - nv)^2 + (nu - lw)^2 + (lv - mu)^2$$

٢٤٧ – برهن أن الكرتين :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 2z + 8 = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 8y + 4z + 20 = 0$$

متعامدتان :

٢٤٨ – برهن أن كل كرة تمر من الدائرة المعينة بالمعادلتين :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax + r^2 = 0 \quad ، \quad z = 0$$

تتقاطع عمودياً مع كل كرة مارة بالدائرة المعينة بالمعادلتين :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad ، \quad y = 0$$

الاجوبة

٢٤٢ – $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$

٢٤٤ – $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 3y - 5z = 0$

الفصل السابع

القطع الناقص

١ – القطع الناقص هو المحل الهندسي للنقط التي مجموع بعديهـــا عن نقطتين ثابتتين ، تسميان المحرقين ، يساوي طولاً ثابتاً . وللقطع محوران تنـــاظريان متعامدان .

٢ – لو نسبنا القطع إلى مجموعة محاور منطبقة على محوريه التناظريين لكانت معادلته :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

a و b تمثلان نصفي قطري القطع .

٣ – من التعريف الأول للقطع يمكننا أن نستنتج تعريفاً آخر : القطع الناقص هو المحل الهندسي للنقط التي نسبة بعدها عن نقطة ثابتة (محرق القطع) إلى بعدها عن مستقيم ثابت ، يسمى الدليل ، تساوي عدداً ثابتاً أصغر من الواحد يدعى بالتباعد المركزي وهو يساوي نسبة بعد المحرق عن مركز القطع إلى نصف القطر الكبير للقطع $\frac{c}{a}$. ($c^2 = a^2 - b^2$) .

٤ – المعادلة القطبية للقطع الناقص . وذلك إذا اتخذنا احد محرقيه قطبـــاً والمحور الكبير محوراً قطبياً هي :

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\vartheta}$$

حيث e تمثل التباعد المركزي و p وسيط القطع .

٥ – تدعى الدائرة التي مركزها مركز القطع ونصف قطرها يساوي نصف القطر الكبير للقطع بالدائرة الأصلية . يمكن تصور القطع على أنه مسقط الدائرة الأصلية على مستو يصنع مع مستويها زاوية قدرها v تحقق العلاقة :

$$\cos v = \frac{b}{a}$$

٦ – تدعى الدائرة التي مركزها مركز القطع ونصف قطرها يساوي نصف القطر الصغير بالدائرة الثانوية .

٧ – يمكن تمثيل القطع الناقص وسيطياً بأشكال مختلفة أكثرها استعمالاً :

$$x = a \cos \varphi \qquad y = b \sin \varphi$$

ومنها :

$$x = a \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad y = \frac{2u}{1 + u^2}$$

٨ – كل مستقيم في مستوي القطع الناقص يقطعه على الأكثر بنقطتين .

٩ – معادلة المماس الذي ميله m للقطع (1) هي :

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

ومعادلة المماس للقطع من نقطة (x_o, y_o) واقعة عليه هي :

$$\frac{x x_o}{a^2} + \frac{y y_o}{b^2} = 1$$

أو (باستعمال التمثيل الوسيطي للقطع) :

$$\frac{x \cos \varphi}{a} + \frac{y \sin \varphi}{b} = 1$$

حيث φ قيمة الوسيط الموافقة للنقطة (x_o , y_o) .

وميل المماسات المرسومة من نقطة ثابتة (x_o , y_o) إلى القطع الناقص (1) تتعين بالمعادلة :

$$(x_o^2 - a^2) m^2 - 2 x_o y_o m + y_o^2 - b^2 = o$$

والمحل الهندسي للنقط التي يرى منها القطع ضمن زاوية قائمة هو دائرة مركزها مركز القطع ومربع قطرها يساوي مجموع مربعي قطري القطع .

١٠ – المحل الهندسي لمتصفات الأوتار الموازية لاستقامة مفروضة ميلها m هو مستقيم (يدعى بالقطر المرافق للاستقامة المفروضة) ميله m' معطى بالعلاقة .

$$m m' = - \frac{b^2}{a^2}$$

وإذا كان oM و oM' نصفي قطرين مترافقين وكان احداثيا M هما $a \cos \varphi$ ، $b \sin \varphi$ فان احداثيي M' هما $- a \sin \varphi$ ، $b \cos \varphi$.

١١ – معادلة القطع الناقص المنسوب إلى قطرين مترافقين هي :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

حيث A و B تمثلان طولي نصفي قطرين مترافقين .

١٢ – مجموع مربعي قطرين مترافقين ثابت وسطح متوازي الأضلاع المنشأ على قطرين مترافقين ثابت .

مسائل وتمارين محلولة

٢٤٩ – اكتب معادلة قطع ناقص إذا علمت ان محرقيه هما :

$$F (1 , 2) \quad , \quad F' (2 , 1)$$

وانه يمر في النقطة $A (5 , 5)$

الحـل :

حسب تعريف القطع الناقص :

$$AF + AF' = 2a$$

ومنـه :

$$a = 5$$

وإذا كانت $M(x, y)$ نقطة ما من القطع فعندئذ يكون :

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 10$$

وبإصلاح هذه المعادلة نجد :

$$99x^2 + 99y^2 + 2xy - 300x - 300y - 2000 = 0$$

وهي المعادلة المطلوبة .

٢٥٠ – برهن ان الناظم على قطـــع ناقص في نقطة A عليه هو منصف داخلي الزاوية الحادثة بين نصفي القطرين اللذين يصلان نقطة التماس بالمحرقين F' , F .

الحـل :

لننسب القطع الناقص إلى محوريه التناظريين فعندئذ تأخـذ معادلته الشكل :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ومعادلة مماسه في نقطة واقعة عليه $A(x_0, y_0)$ هي :

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

من المعادلة الاخيرة نستنتج ان ميل المماس في النقطـــة A هو $\frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0}$ وميل الناظم هو $\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}$. وحيث ان $F(c, o)$ و $F'(-c, o)$ يكون ميل FA هو $\frac{y_0}{x_0 - c}$ وميـل F′A هو $\frac{y_0}{x_0 + c}$.

وعلى هذا يكون ظل الزاوية الحادثة بين FA والناظم هو :

$$m = \frac{\frac{y_0}{x_0 - c} - \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}}{1 + \frac{a^2 y_0^2}{b^2 x_0 (x_0 - c)}}$$

او « بالاستفادة من أن النقطة A واقعة على القطع » .

$$m = \frac{c\, y_0}{b^2}$$

بنفس الطريقة نجد ظل الزاوية الحادثـــة بين الناظم في A ونصف القطر F′A .

$$m' = \frac{c\, y_0}{b^2}$$

وحيث ان $m = m'$ نستنتج ان الناظم هو المنصف الداخلي للزاوية FAF′ وهو المطلوب .

٢٥١ – عين المحل الهندسي لمساقط محرق قطع ناقص على مماساته .

الحل :

لنفرض $A(x_0, y_0)$ نقطة واقعة على القطع فعندئذ تكون معادلة

المماس في هذه النقطة هي :

$$\frac{x\,x_o}{a^2} + \frac{y\,y_o}{b^2} = 1$$

وإذا استعملنا التمثيل الوسيطي للقطع .

$$x_o = a \cos \varphi \qquad y_o = b \sin \varphi$$

نأخذ معادلة المماس الشكل :

$$\frac{x \cos \varphi}{a} + \frac{y \sin \varphi}{b} = 1 \qquad (1)$$

وتكون معادلة العمودي من النقطة $F(c, o)$ على المماس هي :

$$y = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \cdot (x - c) \qquad (2)$$

ويكون مسقط المحرق على المماس هو نقطة تقاطع (1) مع (2) .

$$x = \frac{a(c + a \cos \varphi)}{a + c \cos \varphi} \quad , \quad y = \frac{a\,b \sin \varphi}{a + c \cos \varphi}$$

وبحذف الوسيط من هاتين العلاقتين نجد المعادلة الديكارتية المحل الهندسي المطلوب :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

وهذه المعادلة تمثل الدائرة الأصلية للقطع .

٢٥٢ – لتكن P نقطة واقعة خارج قطع ناقص مركزه M ومحرقاه F_1 و F_2 . ولتكن Q_1 و Q_2 نقط تقاطع الدائرة الاصلية مع

الدائرة التي قطرها PF_1 . برهن أن PQ_1 و PQ_2 مماسان للقطع الناقص .

الحــل :

من الواضح أن الزاوية PQ_1F_1 قائمة ولما كانت Q_1 واقعة على الدائرة الأصلية التي هي ، حسب المسألة السابقة ، المحل الهندسي لمساقط المحرق على مماس متحول للقطع . إذن يكون PQ_1 مماساً للقطع وكذلك PQ_2 وهو المطلوب :

٢٥٣ – برهن ان قطعة المماس لقطع ناقص ، المحصورة بين نقطة التماس ونقطة تقاطع هـذا المماس مع الدليل ، ترى من المحرق الموافق ضمن زاوية قائمة .

الحــل :

ان معادلة المماس للقطع :

$$x = a\cos\varphi \quad ; \quad y = b\sin\varphi$$

في نقطة M موافقة للوسيط φ هي :

$$\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b} = 1 \qquad (1)$$

وان معادلة الدليل الموافق للمحرق $F(c, o)$ هي :

$$x = \frac{a^2}{c} \qquad (2)$$

إن النقطة Q نقطة تقاطع (1) و (2) هي :

$$Q\left(\frac{a^2}{c}, \frac{b}{\sin\varphi}\left(1 - \frac{a\cos\varphi}{c}\right)\right)$$

ويكون ميل FQ هو :

$$m_1 = \frac{c}{b \sin\varphi} \left(1 - \frac{a \cos \varphi}{c} \right)$$

وميل FM :

$$m_2 = \frac{b \sin \varphi}{a \cos\varphi - c}$$

ومنه $m_1 m_2 = -1$ وهو المطلوب .

٢٥٤ – ليكن القطع الناقص :

$$x = a \cos \varphi \qquad y = b \sin \varphi$$

ورؤسه $A(a, o)$ ، $A'(-a, o)$ و $B(o, b)$ و $B'(o, -b)$
ان المماس في M للقطع الناقص السابق يقطع المماسين في A و A' في P و P' والمماسين في B و B' في Q و Q' .

١ – برهن أن $\overline{A'P'}$. $\overline{AP}$ و $\overline{B'Q'}$. $\overline{BQ}$ ثابتان .

٢ – اكتب معادلتي الدائرتـــين (c) و (Γ) اللتين قطراهما PP' و QQ' .

برهن أن (c) تمر بالمحرقين وان (c) و (Γ) متعامدتان .

٣ – اكتب معادلة المحور الأساسي لـ (c) و (Γ) برهن انـــه الناظم في M للقطع الناقص .

٤ – أوجد احداثيات النقطتين D و D' حيث يتقاطع (c) و (Γ)
أوجد المحلات الهندسية لهما .

الحـل :

ان معادلة الماس في M هي :

$$\frac{x \cos \varphi}{a} + \frac{y \sin \varphi}{b} = 1$$

ومعادلات المماسات في A ، A′ ، B ، B′ هي على الترتيب :

$$x = a \qquad x = -a$$
$$y = b \qquad y = -b$$

وتكون احداثيات النقط P ، P′ ، Q ، Q′ هي :

$$P\left(a , b \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) \text{ ، } P'\left(-a , b \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$Q\left(\frac{a(1-\sin\varphi)}{\cos\varphi} , b\right) \text{ ، } Q'\left(\frac{a(1+\sin\varphi)}{\cos\varphi} , -b\right)$$

ويكون :

$$\overline{AP} = b \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} , \quad \overline{A'p'} = b \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$$

$$\overline{BQ} = \frac{a(1-\sin\varphi)}{\cos\varphi} , \overline{B'Q'} = \frac{a(1+\sin\varphi)}{\cos\varphi}$$

ومن هذه العلاقات الاربع نستنتج :

$$\overline{AP} \cdot \overline{A'P'} = b^2 \quad , \quad \overline{BQ} \cdot \overline{B'Q'} = a^2$$

وهو المطلوب الأول :

٢ – لما كان مركز الدائرة c هو :

$$\omega_1 [o , \frac{1}{2} (b\, tg \frac{\varphi}{2} + b\, ctg \frac{\varphi}{2}) = \frac{b}{\sin \varphi}]$$

ونصف قطرها .

$$R_1^2 = (a - o)^2 + (b\, tg\, \varphi - \frac{b}{\sin \varphi})^2 = a^2 + b^2 ctg^2\, \varphi$$

فان معادلتها هي :

$$x^2 + (y - \frac{b}{\sin \varphi})^2 = a^2 + b^2 ctg^2 \varphi$$

ولما كان مركز الدائرة Γ' هو :

$$\omega_2 (\frac{a}{\cos \varphi} , o)$$

ونصف قطرها :

$$R_2^2 = a^2\, tg^2\, \varphi + b^2$$

فان معادلتها هي :

$$(x - \frac{a}{\cos \varphi})^2 + y^2 = a^2\, tg^2\, \varphi + b^2 \qquad (2)$$

وإذا عوضنا احداثيات كل من المحرقين (c , o) F و $F'(- c , o)$

المعادلة الأولى نجد أنها محققه . وهذا يعني أن c تمر بالمحرقين .

ولما كان مربع البعد بين المركزين :

$$\overline{\omega_1 \omega_2}^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \varphi} + \frac{b^2}{\sin^2 \varphi}$$

يساوي مجموع مربعي نصفي القطرين :

$$R_1^2 + R_2^2 = a^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi + b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$$

$$= \frac{a^2}{\cos^2 \varphi} + \frac{b^2}{\sin^2 \varphi}$$

فان الدائرتين (c) و (Γ) متعامدتان .

٣ – من الدائرتين (1) و (2) نلاحظ أن معادلة المحور الأساسي هي :

$$x^2 + \left(y - \frac{b}{\sin \varphi} \right)^2 - a^2 - b^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi =$$

$$\left(x - \frac{a}{\cos \varphi} \right)^2 + y^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - b^2$$

أو :

$$\frac{a\,x}{\cos \varphi} - \frac{b\,y}{\sin \varphi} = c^2 \qquad (3)$$

ولما كان هذا المحور الأساسي يمر بالنقطة مع القطع :

$$x = a \cos \varphi \quad ، \quad y = b \sin \varphi$$

وميله وهو ($\frac{a}{b}(\operatorname{tg} \varphi)$) يساوي ميل الناظم في النقطة المذكورة فان المحور الأساسي هو الناظم للقطع في هذه النقطة .

٤ – ان نقطة تقاطع (c) مع (T) هي بنفس الوقت نقط تقاطع المحور الأساسي لها مع واحدة منها : إذن من (1) و (3) نجد النقط المشتركة :

$$D[(a+b)\cos\varphi , (b+a)\sin\varphi]$$
$$D'[(a-b)\cos\varphi , (b-a)\sin\varphi]$$

ومنها نرى أن المحل الهندسي للنقطة D هو دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a + b والمحل الهندسي للنقطة D′ هو عبارة عن دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a – b .

٢٥٥ – ليكن oM و oM′ نصفي قطرين مترافقين في قطع ناقص مفروض و I منتصف MM′ و T نقطة تلاقي المماسين في M و M′ لهذا القطع مع بعضهما.

(١) برهن ان المحل الهندسي للنقطة I هو قطع ناقص مماس لـ MM′ في I .

(٢) برهن أن المحل الهندسي للنقطة T هو أيضاً قطع ناقص .

الحل :

(١) من المعلوم انه إذا كان احداثيا M هما $a\cos\varphi$ ، $b\sin\varphi$ فإن إحداثيي M′ هما $-a\sin\varphi , b\cos\varphi$ وبالتالي فان إحداثيي I هما :

$$x = \frac{a(\cos\varphi - \sin\varphi)}{2} \quad ; \quad y = \frac{b(\sin\varphi + \cos\varphi)}{2}$$

ومنه نجد :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \cos\varphi \quad ; \quad -\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \sin\varphi$$

بالتربيع والجمع نجد المحل المندمي للنقطة I :

$$2\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{y^2}{b^2} = 1$$

وهو قطع ناقص نصفا قطريه $\frac{b}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

(٢) ان معادلة المماس للقطع في النقطة M هي :

$$\frac{x\cos\varphi}{a} + y\frac{\sin\varphi}{b} = 1 \qquad (1)$$

ومعادلة المماس في النقطة M′ هي :

$$-\frac{x\sin\varphi}{a} + \frac{y\cos\varphi}{b} = 1 \qquad (2)$$

بحل (1) و (2) نجد أن احداثيي T هما :

$$x = a(\cos\varphi - \sin\varphi) \quad ; \quad y = b(\cos\varphi + \sin\varphi)$$

وبحذف الوسيط φ بين هاتين المعادلتين نجد :

$$\frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2} = 1$$

وهو قطع ناقص نصفا قطريه $\sqrt{2}\,b$ و $\sqrt{2}\,a$.

٢٥٦ – برهن انه إذا اتخذنا مركز القطع الناقص قطباً ومحوره الكبير الكبير محوراً قطبياً فان معادلته القطبية تكون :

$$r^2(1 - e^2\,eos^2\varphi) = b^2$$

الحـل :

نعلم أن معادلة القطـــع الديـكارتية ، إذا نسبناه إلى محوريه التناظريين ، هي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

واستناداً إلى نص المسألة يمكننا أن نكتب :

$$x = r \cos \Theta \ , \ y = r \sin \Theta$$

بالتعويض في معادلة القطع نجد :

$$r^2 (b^2 \cos^2 \Theta + a^2 \sin^2 \Theta) = a^2 b^2$$

أو :

$$r^2 (1 - e^2 \cos^2 \Theta) = b^2$$

وهو المطلوب :

٢٥٧ – اذا اخترنا محرق القطع قطباً ومحوره الكبير محوراً قطبياً فبين ان معادلة المماس في النقطة التي زاويتها القطبية α هي :

$$\frac{p}{r} = \cos (\Theta - \alpha) - e \cos \Theta$$

استنتج من ذلك ان قطعتي المماسين المنشأين من نقطة خارج القطع تريان من محرق القطع ضمن زاويتين متساويتين

الحـل :

نعلم ان معادلة القطع القطبية هي :

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \vartheta}$$

وبالانتقال الى الاحداثيات الديكارتية متخذين المحرق نقطـــة اصل والمحور الكبير محوراً للسينات نجد :

$$x^2 + y^2 = (p + e x)^2 \qquad (1)$$

ان معادلتي المماس الوسيطيتين في النقطة (x_1, y_1) على القطع هما :

$$x = x_1 + \alpha \varrho \; ; \qquad y = y_1 + \beta \varrho$$

فاذا عوضنا في المعادلة (١) حصلنا على معادلة من الدرجة الثانية في ϱ ، ولو كتبنا بعد ذلك شرط التماس ، وهو ان يكون مميز هـــذه المعادلة صفراً ، لوجدنا :

$$\beta y_1 + \alpha x_1 = \alpha e p + \alpha e^2 x_1$$

ولو رمزنا لميل المماس بـ $m = \frac{\beta}{\alpha}$ لوجدنا من المعادلة الاخيرة :

$$m = \frac{e p + (e^2 - 1) x_1}{y_1}$$

وتكون معادلة المماس :

$$y - y_1 = \frac{e p + (e^2 - 1) x_1}{y_1} (x - x_1)$$

فاذا عوضنا في هذه المعادلة :

$$x = r\cos\Theta \qquad y = r\sin\Theta$$

$$x_1 = r_1\cos\alpha \qquad y_1 = r_1\sin\alpha$$

ولاحظنا أن $r_1 = \frac{p}{1 - e\ css\ \alpha}$ فاننا نجد :

$$\frac{p}{r} = \cos(\Theta - \alpha) - e\cos\Theta$$

وهذا برهان الجزء الاول من المسألة .

كي نبرهن على الجزء الثاني من المسألة نفرض ان الزاويتين القطبيتين لنقطتي تماس المماسين المنشأين من نقطة ما P خارج القطع هما α و β فعندئذ تكون معادلتا المماسين .

$$\frac{p}{r} = \cos(\Theta - \alpha) - e\cos\Theta$$

$$\frac{p}{r} = \cos(\Theta - \beta) - e\cos\Theta$$

من هاتين المعادلتين نجد :

$$\cos(\Theta - \alpha) = \cos(\Theta - \beta)$$

وهي تعين لنا الزاوية القطبية للنقطة P .

من المعادلة الأخيرة نرى انه اما أن يكون :

$$\Theta - \alpha = \Theta - \beta$$

أي $\alpha = \beta$

وهذا أمر غير ممكن إذا كانت النقطة P خارج القطع .

واما أن يكون :

$$\Theta - \alpha = \beta - \Theta$$

وهذا يعني ان الزاويتين اللتين نرى منهما قطعتي المماس متساويتان .

٢٥٨ — A (0 , 0) و B (1 , − 1) و C (2 , 1) ثــلاث نقط واقعة على قطع ناقص احد محاوره ينطبق على المستقيم $x + y + 1 = 0$ أوجد معادلة القطع :

الحــل :

ان نظير كل من النقط A و B و C بالنسبة لمحور القطع تقع على القطع كذلك . لنبحث أولاً عن A′ نظير A بالنسبة لمحور القطع المنطبق على المستقيم المفروض . لنفرض $A'(x', y')$ ولتكن A″ منتصف A′ A .

بسهولة نلاحظ أن $A''\left(\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2}\right)$. إن هذه النقطة تقع على المستقيم المفروض إذن :

$$x' + y' + 2 = 0 \qquad (4)$$

كما أن A′ A″ عمودي على المستقيم المفروض ، اذن :

$$\frac{x'}{1} = \frac{y'}{1} \qquad (2)$$

بحل المعادلتين (١) و (2) نجد $A'(-1, -1)$.

بالطريقة نفسها نجد أن B' نظير B بالنسبة للمحور هي :

$$B'(0, -2)$$

بهذه الطريقة تكون قد توصلنا إلى معرفة خمس نقط واقعـــة على القطع وهذه تكفي لمعرفة معادلته ويتم ذلك بتعويض احداثيات النقط الخمس في المعادلة :

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x_1 y & x & y & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3 y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & x_4 y_4 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & y_5^2 & x_5 y_5 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

حيث (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) ، (x_3, y_3) ، (x_4, y_4) ، (x_5, y_5) النقط الخمس المفروضة .

فاذا عوضنا ونشرنا المعين الحاصل وجدنا المعادلة المطلوبة :

$$4x^2 - 7xy + 4y^2 - 7x + 8y = 0$$

٢٥٩ – برهن أنه إذا كان لدينا المنحني :

$$A(ax + by + c)^2 + B(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + c = 0$$

فان المستقيمين :

$$ax + by + c = 0 \qquad (1)$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \qquad (2)$$

يمثلان خطين مترافقين فيه وذلك ضمن الشرط $\beta a \neq \alpha b$.

الحـل :

لنفرض محورين جديدين احدهما OX ينطبق على المستقيم (1) والآخر OY ينطبق على المستقيم (2) فعندئذ تأخذ معادلة المنحني الشكل :

$$A' X^2 + B' Y^2 + c' = o$$

وهي معادلة قطع منسوب إلى خطين مترافقين فيه وهذا يؤدي إلى أن المستقيمين :

$X = o$ و $Y = o$ أي (1) و (2) هما خطان مترافقان .

يلاحظ أنه لايمكن اختيار (1) و (2) كمحورين احداثيين جديدين إلا إذا كانا متقاطعين ومنه الشرط $\alpha b \neq \beta a$.

٢٦٠ — أوجد معادلة قطع ناقص يمر بالنقط $D (o , 1)$ و $E (1 , o)$ ويقبل المستقيمين .

$$x - 2 y - 1 = o \quad , \quad 2 x - y + 1 = o$$

كخطين مترافقين فيه :

الحـل :

استناداً إلى المسألة السابقة يمكن كتابة معادلة القطع على الشكل :

$$A (x - 2 y - 1)^2 + B (2 x - y + 1)^2 + C = o \qquad (1)$$

ولما كانت D و E واقعين على القطع اذن :

$$9 B + C = 9 A + C = o$$

فاذا عوضنا كلاً من B و A بدلالة C في المعادلة (1) ثم اختصرنا على C وجدنا المعادلة المطلوبة :

$$(x - 2y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 = 9$$

مسائل وتمارين غير محلولة

٢٦١ – محيط مثلث يساوي 3 o وحدة طول واحداثيات رأسين منه هي (5 - , o) و (5 , o) فما هو المحل الهندسي للرأس الثالث .

٢٦٢ – قطعة AB طولها 12 سم تتحرك في لمستوي oxy بحيث ترمم A المحور ox وترمم B المحور oy . ما هو المحل الهندمي للنقطة C التي تبعد عن A بمقدار 4 سم .

٢٦٣ – عين المماسات للقطع الناقص :

$$x^2 - xy - y^2 - 2x + 2y + 1 = o$$

والموازية للمستقيم $2x + 2y - 1 = o$

٢٦٤ – عين المماسات للقطع الناقص :

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

والموازنة للمحاور الاحداثية :

٢٦٥ – عين المماسات للقطع :

$$3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = o$$

والمارة بالنقطة . (2 , 1) .

٢٦٦ – عين المماسات للقطع :

$$x^2 - x\,y - y^2 - 2\,x + 2\,y + 1 = 0$$

والمارة بالنقطة $(4\,,-2)$

٢٦٧ – برهن أنه إذا كان PFQ وتراً محرقياً في قطع ناقص يصنع زاوية θ مع محور القطع فان :

$$\frac{1}{FP} + \frac{1}{FQ} = \frac{2}{p}$$

$$\frac{1}{FQ} - \frac{1}{FP} = \frac{2\,e\cos\theta}{p}$$

$$PQ = \frac{2\,p}{1 - e^2\cos^2\theta}$$

٢٦٨ – أوجد المحل الهندسي لمركز الدائرة الماسة للدائرتين :

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 6\,x - 27 = 0$$

٢٦٩ – برهن ان حاصل ضرب بعدي المحرقين عن مماس متحول للقطع الناقص ثابت .

٢٧٠ – قطع ناقص محرقه في النقطة $(3\,,0)$ ومعادلة الدليل الموافق $x - 1 = 0$ وتباعده المركزي $\frac{1}{2}$. أوجد معادلة هذا القطع وطول محوره الكبير .

٢٧١ – المماس في M لقطع ناقص يقطع المماسين في الذروتين A و A′

من المحور الكبير في D و E . نصل هاتين النقطتين بالمحرقين فنحصل على أربعة مستقيمات تتقاطع في النقطتين G_1 و H .

١ – برهن ان G_1 و H تقعان على الناظم في M للقطع

٢ – أوجـــد المحلين الهندسيين لـ G_1 و H عندما تتحول M على القطع الناقص .

٢٧٢ – ترمم النقطة $M\ (a \cos \varphi , b \sin \varphi)$ القطع الناقص :

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

وتمس الدائرة Γ القطع في النقطة M مارة بمركزه . أوجـد المحلات الهندسية الآتية ، وذلك عندما يتحول M على القطع الناقص المذكورة .

١ – المحل الهندسي لمركز الدائرة ω .

٢ – المحل الهندسي لنقطة تقاطع المستقيم ω M مع الدائرة Γ .

٣ – المحل الهندسي لمنتصف الوتر المشترك بين القطع والدائرة .

٤ – المحل الهندسي لمسقط مركز القطع على الوتر المشترك .

٢٧٣ – المستقيان :

$$x + y - 1 = 0$$
$$x - y + 1 = 0$$

هما نصفا قطرين مترافقين في قطع . أوجد معادلة هذا القطع إذا علمت ان محوره الكبير 4 ومحوره الصغيرة 2 .

٢٧٤ – برهن انه اذا قطع مماس في P لقطع ناقص مماسين متوازيين في النقطتين T , T′ .

فان : $TP \cdot PT' = \overline{OD}^2$

و $FT \cdot FT' : F'T \cdot F'T' = FP : F'P$

حيث F و F' محرقـــا القطع و OD نصف القطر المرافق لـ OP

٢٧٥ – برهن انه إذا كان F محرق قطع ويقطـــع الناظم في P المحـــور الكبير في G والصغير في g و OD نصف قطر مرافق لـ OP فان :

$$FG : OF = FP : AO$$
$$FG : OF = OD : BO$$

حيث A احدى نهايتي المحور الكبير و B احدى نهايتي المحور الصغير .

٢٧٦ – P نقطة من قطع ناقص و oQ هو نصف قطر موازي للمماس في P (o مركز القطع) برهن أن $\overline{FP} \cdot \overline{F_1P} = \overline{OQ}^2$.

الأجوبة

٢٦١ – $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{100} = 1$

٢٦٢ – $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$

٢٦٣ – $x + y = 2$ ، $5x + 5y = 6$

٢٦٤ – $x = \pm 2$ ، $y = \pm 2$

٢٦٥ – $9x + 10 = 28$

٢٦٦ – $x + y = 2$ ، $7x + 10y = 8$

$$220\,x^2 + 256\,y^2 - 660\,x = 3025$$ — ٢٦٨

$$28\,x^2 + 64\,y^2 - 84\,x = 49$$

$$3\,x^2 + 4\,y^2 - 22\,x + 5 = 0 \; ; \; 2\,\frac{2}{3}$$ — ٢٧٠

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{(a \pm c)\,2}{b^2\,c^2}\,y^2 = 1$$ — ٢٧١

$$y = \frac{(b^2 - c^2 \cos^2 \varphi) \sin \varphi}{2\,b}$$ — ٢٧٢

$$x = \frac{(a^2 + c^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi}{2\,a}$$

$$x = \frac{c^2}{a} \sin^2 \varphi \cos \varphi \text{ ، } y = -\frac{c^2}{b} \cos^2 \varphi \sin \varphi$$ (٢)

$$x = \frac{a}{c^2} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \cos \varphi$$

$$y = -\frac{b}{c^2} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \sin \varphi$$ (٣)

$$x = \frac{a\,b^2}{c^2} \cos \varphi \quad \text{،} \quad y = -\frac{a^2\,b}{c^2} \sin \varphi$$ (٤)

$$(x - y + 1)^2 + 4\,(x + y - 1)^2 = 8$$ — ٢٧٣

الفصل الثامن

القطع الزائد

١ – القطع الزائد هو المحل الهندسي للنقط التي فضل بعديهـا عن نقطتين ثابتتين ، تسميان بالمحرقين ، يساوي طولاً ثابتاً $2a$.

٢ – إذا نسبنا القطع إلى جملة محاور منطبقة على محوريه التناظريين كانت معادلته :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

a و b تمثلان طولي نصفي قطري القطع .

نقول عن قطع زائد انه متساوي الساقين إذا كان $a = b$.

٣ – من التعريف الاول للقطع يمكننا ان نستنتج تعريفاً آخر : القطع الزائد هو المحل الهندسي للنقط التي نسبة بعدها عن نقطة ثابتة (هي المحرق) إلى بعدها عن مستقيم ثابت ، يدعى الدليل ، تساوي عدداً ثابتاً e أكبر من الواحد يدعى بالتباعد المركزي وهو يساوي نسبة بعد المحرق عن مركز القطع الى نصف القطر الحقيقي للقطع ، أي : $\frac{c}{a}$ حيث ($c^2 = a^2 + b^2$) .

٤ – المعادلة القطبية للقطع الزائد ، اذا اتخذنا احد محرقيه قطباً والمحور الحقيقي محوراً قطبياً ، هي :

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \Theta}$$

حيث e تمثل التباعد المركزي و p وسيط القطع .

٥ – للقطع الزائد خطان مقاربان يميلان على محور القطع زاوية ظلهـا $\pm \frac{b}{a}$.

٦ – معادلة القطع الزائد المنسوب لمستقيميه المقاربين :

$$X\,Y = \pm \frac{c^2}{4}$$

يؤخذ بالاشارة + عندما يقع القطع في الجزأين الأول والثالث ويؤخذ بالاشارة – في الحالة الثانية) .

إن سطح المثلث المحصور بين الخطين المقاربين وأحد مماسات القطع ثابت ويساوي جداء نصفي محوري القطع .

٧ – يمكن تمثيل القطع الزائد وسيطياً بأشكال مختلفة أكثرها استعمالاً .

$$x = \mp a \operatorname{ch} \varphi \quad , \quad y = b \operatorname{sh} \varphi \qquad (2)$$

ومنها : $y = b \operatorname{tg} t \quad , \quad x = \dfrac{a}{\cos t}$

و : $y = \dfrac{2 b u}{1 - u^2} \quad , \quad x = a \dfrac{1 + u^2}{1 - u^2}$

٨ – كل مستقيم في مستوي القطع الزائد يقطعه على الاكثر بنقطتين .

٩ – معادلة المماس الذي ميله m للقطع (1) هي :

$$y = m x \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$$

ومعادلة المماس للقطع (1) من نقطة $M(x_0 \, ; \, y_0)$ واقعة عليه هي :

$$\frac{x\,x_0}{a^2} - \frac{y\,y_0}{b^2} = 1$$

وإذا كانت M توافق قيمـــة للوسيط φ (وفق التمثيل الوسيطي (2))
فعندئذ تكون معادلة المماس :

$$\mp \frac{x \operatorname{ch} \varphi}{a} - \frac{y \operatorname{sh} \varphi}{b} = 1$$

وميل المماسات المرسومة من نقطة ثابتة (x_0 , y_0) إلى القطـــع (1) تتعين بالمعادلة :

$$(x_0^2 - a^2)\, m^2 - 2\, x_0\, y_0\, m + y_0^2 + b^2 = 0$$

والمحل الهندسي للنقط التي يرى منها القطع ضمن زاوية قائمة هو دائرة مركزها مركز القطع ومربـع قطرها يساوي فضل مربعي نصفي قطري القطع .

١٠ – يدعى القطع الزائد : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (3)
بالقطع المرافق للقطع (1)

١١ – المحل الهندسي لمنتصفات الاوتار الموازية لاستقامة مفروضة ميلها m هو مستقيم (يدعى بالقطر المرافق للاستقامة المفروضة) يعطى ميلـه m' بالعلاقة :

$$m\, m' = \frac{b^2}{a^2}$$

وإذا كان oA و oB نصفي قطرين مترافقين (o مركز القطع) وإذا كانت النقطة A على القطع (1) ، واحداثياها $y = b \operatorname{sh} t$ ، $x = a \operatorname{ch} t$ ، فان النقطة B تقع على القطع (3) واحداثياها : $x = a \operatorname{sh} t \; ; \; y = b \operatorname{ch} t$.

١٣ – معادلة القطع الزائد المنسوب إلى قطرين مترافقين هي :

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$

حيث A و B تمثلان طولي نصفي قطرين مترافقين .

١٤ – فضل مربعي قطرين مترافقين ثابت وسطح متوازي الأضلاع المنشأ على قطرين مترافقين ثابت أيضاً .

١٥ – إذا قطعنا قطعاً زائداً بمستقيم ما فان القطعتين المحصورتين بين القطع وخطيه المقاربين متساويتان . كما ان القطعتين المحصورتين بين القطع المرافق والخطين المقاربين كذلك متساويتان .

ان نقطة التماس تقسم قطعة المماس المحصورة بين خطين مقاربين إلى قطعتين متساويتين .

مسائل وتمارين محلولة

٢٧٧ – أوجد معادلة قطع زائد متساوي الساقين إذا علمت أن احد محرقيه هو $F(1, 1)$ وان دليله هو المستقيم :

$$x + y - 1 = 0$$

الحـل :

لنحسب أولاً التباعد المركزي . بما أن $a = b$ فانه يكون :

$$c^2 = a^2 + a^2 = 2\,a^2$$

ومنه :

$$c = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$$

وإذا كانت (x , y) نقطة ما من القطع فان بعدها عن الدليل هو :

$$\frac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}}$$

وبعدهـــا عن المحرق هو $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$. واستناداً إلى التعريف الثاني للقطع يكون :

$$(x - 1) + (y - 1)^2 = (x + y - 1)^2$$

ومنـه :

$$2xy = 1$$

٢٧٨ – ما هي معادلة قطع زائد أحد محرقيـه هو (o , 2) ويقبل المستقيمين :

$$x + y - 1 = o$$
$$x - y + 1 = o$$

كخطين مقاربين له :

الحـل :

إن مركز القطع يقع في نقطة تقاطع خطيه المقاربين أي في النقطة (o , 1) والمحرق الآخر يقع في النقطة (o , o) نظير المحرق الأول بالنسبة للمركز وأما بعد المحرق عن المركز فهو $c = 1$.

وبما أن محاور القطع هي منصفات الزوايا الحادثة بين الخطين المقاربين فهي إذن :

$$\frac{x + y - 1}{\sqrt{2}} = \mp \frac{x - y + 1}{\sqrt{2}}$$

ومنه :

$$y = 1 \quad , \quad x = o$$

ولكن محور القطع هو المستقيم $x = o$ لأن المحرق يقع عليه . وبما ان الخطين المقاربين يميلان على محور القطع بزاوية مقداره $\frac{\pi}{4}$ إذن : $\frac{b}{a} = 1$.

ولما كان $c^2 = a^2 + b^2 = 1$ إذن $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

وبذلك تكون معادلة القطع :

$$2 (y - 1)^2 - 2 x^2 = 1$$

أو :

$$2 x^2 - 2 y^2 + 4 y - 1 = o$$

٢٧٩ – A نقطة كائنة على المحور ox فصلها a . عين المحل الهندسي للنقطة M من المستوي xoy بحيث يكون :

$$(1) \qquad \widehat{MAo} = 2 \widehat{MoA}$$

الحـل :

لنفرض (x , y) إحداثيي M فعندئذ يكون $tg \widehat{MAo} = \frac{y}{a - x}$ و $tg \widehat{MoA} = \frac{y}{x}$. لنأخذ ظل الطرفين في (1) فنجد :

$$\frac{y}{a-x} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

ومنـــه :

$$y(3x^2 - y^2 - 2ax) = o$$

فأما $y = o$ وهذا حل واضح ، أو :

$$3x^2 - y^2 - 2ax = o$$

وهذه تكتب بالشكل :

$$3\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{a^2}{3}$$

وهي معادلة قطع زائد مركزه $\left(o , \frac{a}{3}\right)$.

٢٨٠ – لدينا قطع زائد متساوي الساقين معين بالمعادلة :

$$xy = m^2$$

ووتران متعامدان AB و CD من هذا القطع . برهن أن كلاً من النقط A و B و C و D هي نقط تلاقي ارتفاعات المثلث الذي رؤوسه النقط الأخرى .

الحل :

لنفرض أن $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_2 , y_2)$ و $C(x_3 , y_3)$ و $D(x_4 , y_4)$ فعندئذ يكون (باعتبار أن هذه النقط واقعة على القطع) :

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 = x_4 y_4 = m^2 \qquad (1)$$

وبما أن AB و CD متعامدان فان :

$$(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3) = o$$

أو (بالاستفادة من (١) بتعويض y_i بما يساويها بدلالة x_i) :

$$x_1 x_2 x_3 x_4 + m^4 = 0 \qquad (2)$$

لنبرهن أن A هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث BCD . من الواضح أن A تقع على الارتفاع المتعلق بـ B وذلك لأن AB عمودي على CD حسب الفرض . يكفي أن نبرهن أن CA عمودي على BD أي أن :

$$(x_3 - x_1)(x_4 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_4 - y_2) = 0$$

أو (بالاستفادة من (1)) .

$$x_1 x_2 x_3 x_4 + m^4 = 0$$

وهذا بالفعل محقق حسب (2) وهو المطلوب .

يمكن بشكل مماثل برهان أن B هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ADC وهكذا .

٢٨١ – نرسم من نقطة M من قطع زائد منسوب لمحوريه التناظريين ، موازياً لأحد مستقيميه المقاربين فيلاقي المحور في النقطة P. ثم نرسم من M مماساً MT للدائرة الأصلية لهذا القطع . برهن أن MP = MT .

الحل :

بما أن نصف قطر الدائرة الأصلية a ومركزها نقطة الأصل فإن :

$$\overline{MT}^2 = x_0^2 + y_0^2 - a^2 \qquad (1)$$

بفرض أن احداثيي M هما x_0 و y_0 .

ومعادلة المستقيم الموازي لأحد المستقيمين المقاربين من النقطـــة M هي :

$$y - y_o = \mp \frac{b}{a} (x - x_o)$$

ويلاقي هذا المستقيم محور القطع في النقطة :

$$P (x_o \pm \frac{a\, y_o}{b} , o)$$

وعلى هذا فإن :

$$\overline{MP}^2 = \frac{a^2 y_o^2}{b^2} + y_o^2 \qquad (2)$$

واستناداً إلى كون النقطة M واقعة على القطع فان :

$$b^2 x_o^2 - a^2 y_o^2 = a^2 b^2$$

بالتعويض في (2) نجد أن :

$$\overline{MP}^2 = x_o^2 + y_o^2 - a^2 \qquad (3)$$

بمقارنة (1) مع (3) نجد أن $MP = MT$ وهو المطلوب .

٢٨٢ - اكتب معادلة القطع الزائد الذي يقع مركزه في النقطـة (1 , 1) وأحد محرقيه في النقطة (3 , 3) ويقبل المستقيم :

$$x + 2\,y - 7 = o$$

مماساً له .

الحــل :

بسهولة نلاحظ أن :

$$c^2 = 4 + 4 = 8$$

أي

$$c = 2\sqrt{2}$$

ومن جهة ثانية نعلم أن معادلة المماس للقطع (إذا كان منسوباً لمحوريه التناظريين) هي :

$$y = m x \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$$

فاذا دعونا فاصلة نقطة تقاطع المماس مع محور السينات h فعندئذ يكون :

$$m^2 h^2 = a^2 m^2 - b^2 \qquad (1)$$

وهذه علاقة تربط بين ميل المماس عن محور القطع وبعد نقطة تقاطع المماس مع المحور الحقيقي للقطع عن مركز القطع . ولكن حيث ان معادلة محور القطع « المار بالنقطتين (1 و 1) ، (3 و 3) » هي :

$$y = x$$

فنقطة تقاطع المماس مع المحور هي $x = y = \frac{7}{3}$

وبعد نقطة التقاطع عن المركز هو :

$$h^2 = \frac{32}{9}$$

واما ميل المماس عن محور السينات فهو $-\frac{1}{2}$ ـ ولما كان ميل محور القطع يساوي واحداً فان ميل المماس عن محور القطع :

$$m = \frac{-\frac{1}{2} - 1}{1 - \frac{1}{2}} = -3$$

وعلى هذا نجد اذا عوضنا في العلاقة (1) أن :

$$\frac{32}{9} = \frac{9\ a^2 - b^2}{9}$$

وبما أن $c = 2\sqrt{2}$ إذن $a = 2$

وحسب تعريف القطع تكون المعادلة المطلوبة :

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} - \sqrt{(x+1)^2 + y+1)^2} = \pm 4$$

وبالاصلاح نجد $xy - x - y - 1 = 0$

٢٨٣ – ليكن لدينا القطع الزائد المعين بالمعادلة الديكارتيـــة $xy = 6$.

أو بالمعادلتين الوسيطيتين :

$$x = 2t \qquad y = \frac{3}{t}$$

١ – أوجد معادلة المماس والناظم في نقطـة ما M من القطع ثم برهن أن هذا الناظم يقطع المنحني مرة اخرى . عين هذه النقطة .

٢ – عين نقطة تقاطع ناظمين للقطع في نقطتين موافقتين لقيمتين للوسيط t_1 و t_2 ثم عين الموضع الذي تنتهي اليه هذه النقطة عندما نجعل $t_1 \longrightarrow t_2$ « مركز تقوس القطع » .

٣ – برهن انه يمكن رسم أربعة نواظم للقطع من نقطة (X, Y) واذا لاقت هذه النواظم القطع في النقط (x_4, y_4) ، (x_3, y_3) ، (x_2, y_2) ، (x_1, y_1) فبرهن أن :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = X$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = Y$$
$$x_1 x_2 x_3 x_4 = y_1 y_2 y_3 y_4 = -36$$

الحـل :

من اجل ايجاد معادلة المماس في نقطة (x_0 , y_0) على القطع ، نفرض ان هذه المعادلة من الشكل :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha \varrho \\ y = y_0 + \beta \varrho \end{cases}$$

وبالتعويض في المعادلة الديكارتية نجد :

$$\alpha \beta \varrho^2 + (\alpha y_0 + \beta x_0)\varrho = 0$$

كي يكون لهذه المعادلة جذر مضاعف يجب أن يكون :

$$\alpha y_0 + \beta x_0 = 0$$

ومنه

$$m = - \frac{y_0}{x_0}$$

وبذلك تكون معادلة المماس المطلوبة :

$$y - y_0 = - \frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$$

أو :

$$x_0 y + y_0 x = 2 x_0 y_0$$

وحيث أن احداثيات نقطة ما على المنحني $x_0 = 2t$, $y_0 = \frac{3}{t}$ تصبح معادلة المماس :

$$2 t y + \frac{3}{t} x = 12$$

وتكون معادلة الناظم :

$$y - \frac{3}{t} = \frac{2 t^2}{3}(x - 2t) \qquad (1)$$

لايجاد تقاطع هذا الناظم مع القطع $x\,y = 6$ نبدل فنجد :

$$2\,t^3\,x^2 + (9 - 4\,t^4)\,x - 18\,t = 0$$

وهذه المعادلة من الدرجة الثانية في x تعطينا :

$$x_1 = 2\,t \quad ، \quad x_2 = -\frac{9}{2\,t^3}$$

ويكون :

$$y_1 = \frac{3}{t} \quad ، \quad y_2 = -\frac{4\,t^3}{3}$$

فالنقطة المطلوبة هي: $\left(-\frac{9}{2\,t^3} \text{ ، } \frac{-4\,t^3}{3}\right)$

٢ – الناظمان الموافقان للقيمتين t_1 و t_2 هما :

$$y - \frac{3}{t_1} = \frac{2\,t_1^2}{3}\,(x - 2\,t_1)$$

$$y - \frac{3}{t_2} = \frac{2\,t_2^2}{3}\,(x - 2\,t_2)$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد نقطة التقاطع وهي :

$$x = \frac{9 + 4\,t_1\,t_2\,(t_1^2 + t_1\,t_2 + t_2^2)}{2\,t_1\,t_2\,(t_1 + t_2)}$$

$$y = \frac{9\,(t_1^2 + t_1\,t_2 + t_2^2) + 4\,t_1^3\,t_2^3}{3\,t_1\,t_2\,(t_1 + t_2)}$$

فاذا جعلنا $t_2 \longrightarrow t_1$ وجدنا احداثيات مركز التقوس :

$$x = \frac{9 + 12\ t_1^4}{4\ t_1^3} \quad , \quad y = \frac{27 + 4\ t_1^4}{9\ t_1}$$

٣ – لنبحث عن قيم الوسيط t التي من أجلهـــا يمر الناظم (1) بـ (X, Y) . إن قيم t هذه تحقق العلاقة :

$$Y - \frac{3}{t} = \frac{2\ t^2}{3} (X - 2\ t)$$

أو :

$$t^4 - \frac{1}{2} X\ t^3 + \frac{3}{4}\ t\ Y - \frac{9}{4} = 0 \qquad (2)$$

فاذا كانت t_1 و t_2 و t_3 و t_4 جذور هذه المعادلة فإنه يمكن كتابتها بالشكل :

$$(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)(t - t_4) = 0$$

وبمقارنة الأمثال نجد :

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{1}{2} X$$

$$t_1\ t_2 + t_1\ t_3 + t_1\ t_4 + t_2\ t_3 + t_2\ t_4 + t_3\ t_4 = 0$$

$$t_1\ t_2\ t_3 + t_2\ t_3\ t_4 + t_3\ t_4\ t_1 + t_4\ t_1\ t_2 = -\ \frac{3}{4}\ Y$$

$$t_1\ t_2\ t_3\ t_4 = -\frac{9}{4}$$

واستناداً إلى ان : $x = 2\ t$ و $y = \frac{3}{t}$ نجد :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\ (t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = X$$

وهي العلاقة الأولى :

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 3 \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} \right)$$

$$= \frac{3 (t_2 t_3 t_4 + t_3 t_4 t_1 + t_4 t_1 t_2 + t_1 t_2 t_3)}{t_1 t_2 t_3 t_4} = Y$$

وهي العلاقة الثانية :

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = 16 t_1 t_2 t_3 t_4 = - 36$$

$$y_1 y_2 y_3 y_4 = \frac{8}{t_1 t_2 t_3 t_4} = - 36$$

وهو المطلوب .

٢٨٤ – ليكن القطع الزائد (C) الذي ترسمه النقطة M

$$x = \frac{a}{\cos u} \quad ، \quad y = b \operatorname{tg} u$$

والقطع (C′) الذي ترسمه النقطة M′ .

$$x = a \operatorname{tg} u \quad ، \quad y = \frac{b}{\cos u}$$

١ – اكتب معادلة المماس MT في M للقطع (c) ومعادلة المماس M′ T′ في M′ للقطع (c′) . برهن ان MT يوازي oM′ وان M′ T′ يوازي OM . ان MT يقطع ox و oy في P و Q و M′ T′ يقطع نفس المحورين في P′ و Q′ ، برهن أن P Q′ و P′ Q يوازيان استقامة ثابتة . برهن ان OM′ هو القطر المرافق لـ OM .

٢ – احسب $\overline{OM}^2 - \overline{OM'}^2$. احسب سطح المثلث OMM′ .

٣ – أوجد المحل الهندسي للنقطة H منتصف MM′ وللنقطة G

نقطة تقاطع MT و M'T' وذلك عندما يتحول الوسيط u .

٤ – ليكن d و d' بعدي o عن MT و M'T' ، احسب :

$$\frac{1}{d^2} - \frac{1}{d'^2}$$

الحـل :

لما كانت المعادلة الديكارتية للقطع الزائد (c) هي من الشكل :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

فان معادلة المماس في نقطة واقعة عليه $M(x_0 , y_0)$ هي :

أي :

$$\frac{x_0\, x}{a^2} - \frac{y_0\, y}{b^2} = 1$$

$$b\, x - a\, y \sin u = ab \cos u \qquad (1)$$

ولما كانت المعادلة الديكارتية للقطع الزائد (c') هي من الشكل

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

فان معادلة المماس في نقطة واقعة عليه $M'(x_0 , y_0)$ هي :

$$\frac{y_0\, y}{b^2} - \frac{x_0\, x}{a^2} = 1$$

أي :

$$a\, y - b\, x \sin u = a\, b \cos u \qquad (2)$$

ان ميل OM' هو :

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{\cos u} \cdot \frac{1}{a \operatorname{tg} u} = \frac{b}{a \sin u}$$

في حين نلاحظ من المعادلة (1) أن ميل المماس MT هو كذلك $\frac{b}{a \sin u}$ ومنه نستنتج أن MT يوازي 'OM . بنفس الطريقة نلاحظ أن M'T' يوازي OM .

من المعادلة (1) نحصل على احداثيات النقط P و Q بتعويض y بصفر تارة و x بصفر تارة أخرى :

$$P (a \cos u , o) \quad , \quad Q (o , - b \operatorname{ctg} u)$$

ومن المعادلة (2) :

$$P' (- a \operatorname{ctg} u , o) \quad , \quad Q' (o , b \cos u)$$

ومنه نجد ميل 'P Q هو $\frac{-b}{a}$ وكذلك ميل P' Q هو $\frac{-b}{a}$ وهذا يعني أن كلًا من 'PQ و P' Q يوازي الاستقامة الثابتة التي ميلها $\frac{-b}{a}$.

يلاحظ ان جداء ميلي 'OM و OM هو :

$$\frac{b}{a \sin u} \cdot \frac{b \sin u}{a} = \frac{b^2}{a^2}$$

وهذا يعني أن 'OM هو القطر المرافق لـ OM .

٢ — لما كان 'OM و OM نصفي قطرين مترافقين فاستناداً إلى نظريات ابولونيوس يكون لدينا :

$$\overline{OM}^2 - \overline{O\,M'}^2 = a^2 - b^2$$

سطح المثلث $OMM' = \frac{1}{2} ab$

٣ — نلاحظ أن :

$$H\left[\frac{a(1+\sin u)}{2\cos u} , \frac{b(1+\sin u)}{2\cos u} \right]$$

ومنه نجد :

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

فالمحل الهندسي لـ H هو أحد الخطين المقاربين للقطعين .

للحصول على نقطة تقاطع MT و M′ T′ نحـــل المعادلتين (1) و (2) فنجد :

$$G\left[\frac{a(1+\sin u)}{\cos u} , \frac{b(1+\sin u)}{\cos u} \right]$$

ومنه نجد :

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

وهـذا يعني أن المحـل الهندسي لـ G هو نفس المحل الهندسي لـ H

٤ — بسهولة نلاحظ ان بعد O عن MT وبعد O عن MT′ هما :

$$d = \frac{|\,ab\cos u\,|}{\sqrt{b^2 + a^2\sin^2 u}} , \quad d' = \frac{|\,ab\cos u\,|}{\sqrt{a^2 + b^2\sin^2 u}}$$

ومنه :

$$\frac{1}{d^2} - \frac{1}{d'^2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2}$$

وهو المطلوب .

٢٨٥ – لدينا قطع زائد تباعده المركزي $e = 2$. برهن أن أية دائرة تمر باحد رأسي القطع وبالمحرق الموافق للرأس الآخر تـلاقي القطع في ثلاث نقط هي رؤوس مثلث متساوي الأضلاع .

الحل :

نلاحظ بسهولة أن $c = 2a$ و $b^2 = 3a^2$ وأن معـادلة القطع إذا نسب إلى محوريه التناظريين هي :

$$3x^2 - y^2 - 3a^2 = o \quad (1)$$

واذا فرضنا أن الدائرة تمر بالرأس $(-a,o)$ وبالمحرق (c,o)

فعندئذ يقع مركزها في النقطة $\omega\left(\frac{a}{2}, \lambda\right)$ وتكون معادلتها :

$$x^2 + y^2 - a x - 2\lambda y - 2a^2 = o \quad (2)$$

ومن المعلوم أن الشرط اللازم والكافي كي يكون مثلث $M_1M_2M_3$ متساوي اضلاع هو أن ينطبق مركزه على مركز الدائرة المارة برؤوسه. فاذا كان $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$ فيلزم ويكفي ان نبرهن أن :

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{a}{2} \quad ; \quad \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \lambda$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$y = \frac{4x^2 - ax - 5a^2}{2\lambda} \qquad (3)$$

وبتعويض هذه القيمة في (1) نحصل على معادلة من الدرجة الرابعة في x تعين فصول نقاط التقـــاطع والتي هي الرأس (a , o) والنقط الثلاث M_1, M_2, M_3 فاذا قسمنا هذه المعادلة على (x + a) وجدنا المعادلة:

$$16x^3 - 24ax^2 - (12\lambda^2 + 15a^2)x + 25a^3 + 12a\lambda^2 = o$$

ومنه نجد :

$$(4) \quad x_1+x_2+x_3 = \frac{24a}{16} \; ; \; x_1x_2 + x_2x_3 + x_2x_1 = \frac{-(12\lambda^2 + 15a^2)}{16}$$

وبالتالي فان :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = \frac{33a^2 + 12\lambda^2}{8}$$

وبالعودة إلى (3) نجد :

$$(5) \quad y_1 + y_2 + y_3 = \frac{4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - a(x_1+x_2+x_3) - 15a^2}{2\lambda} = 3\lambda$$

من (4) و (5) نجد أن :

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{a}{2} \quad ; \quad \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \lambda$$

وهو المطلوب .

مسائل وتمارين غير محلولة

٢٨٦ – اكتب معادلة الناظم للقطع الزائد $3x^2 - 7y^2 = 20$ من النقطة $(4, 2)$.

٢٨٧ – اكتب معادلات المماسات للقطع الزائد $3x^2 - y^2 = 48$ من النقطة $(2, 0)$.

٢٨٨ – نرسم من نقطة P من قطع زائد موازيين الخطين المقاربين فيقطعانها في النقطتين C و D ، برهن أن $PC \cdot PD = \frac{1}{4} a^2 e^2$.

٢٨٩ – يلاقي الناظم في P من القطع الزائد $x^2 - y^2 = a^2$ المحورين الاحداثيين في النقطتين G و H وبرهن أن P هو مركز الدائرة المـــارة بـ o و G و H .

٢٩٠ – P نقطة من القطع الزائد $xy = c^2$. المماس في P يـلاقي محور السينات في A ومحور العينات في B . النقطـــة C اختيارية على محور السينات ، والنقطة D من محور العينات بحيث يكون BC موازياً AD . برهن أن CD مماس للقطع المفروض .

٢٩١ – ابحث عن معادلة القطع الزائد الذي يمر بالنقط $(1, 1)$، $(2, 1)$، $(-1, -2)$.

ويقبل المستقيم : $x + y - 1 = 0$

خطاً مقارباً له .

٢٩٢ — ماهي معادلة القطع الزائد المتساوي الساقـــين إذا علمت خطه المقارب :

$$x - y + 1 = o$$

ونقطتين منه $(1 , 1)$ و $(2 , 1)$.

٢٩٣ — ماهي معادلة المماس للقطع الزائد :

$$5 x^2 + 7 x y + y^2 - x + 2 y = o$$

في نقطة الأصل :

٢٩٤ — P نقطة ما من قطع زائد ، N و N′ مسقطاها على محوري القطع ، T و T′ نقطتا تقاطع المماس في P للقطع مع المحورين . G و G′ نقطتا تقاطع الناظم في P مع المحورين . H مسقط المبدأ o على الناظم المذكور ، برهن :

١ً — $\overline{OG} \cdot \overline{OT} = a^2 + b^2$

٢ً — $\overline{OG} = \dfrac{c^2}{a^2} \overline{ON}$

٣ً — $\overline{OG'} = \dfrac{c^2}{b^2} \overline{ON'}$

٤ً — $\overline{PH} \cdot \overline{PC} = - b^2$

٥ً — $\overline{PH} \cdot \overline{PG'} = a^2$

٢٩٥ — ليكن المستقيم Δ العمود على المحور $x' ox$ في نقطة H وليكن $OH = l$ بفرض $l > o$ وليكن القطع المخروطي E المعرف بالمحرق o والدليل Δ والتباعد المركزي e بفرض $e \neq 1$.

١ — احسب فصلي الدورتين A و A′ الواقعتـــين على المحور $x' ox$ من القطع E ، وفصل مركزه وبعد الدليل الآخر Δ' عن o .

١ – عين قيمة التباعد المركزي e ليكون البعد بين الدليلين مساوياً $\frac{2\ell}{3}$. بين ان القطع المخروطي الموافق هو قطع زائد . اوجد معادلتي خطية المقاربين .

٢٩٦ - ليكن لدينا القطع الزائد المتساوي الساقين .

$$x = \frac{a}{\cos u} \quad , \quad y = a \operatorname{tg} u$$

ان المماس في M من فرع اليمين يقطع الخطين في P و Q .

١ – احسب بدلالة u احداثيات P و Q ثم مركبات الشعاعين MP و MQ .

٢ – برهن أن : $\overline{MF} \cdot \overline{MF'} = \overline{MP^2}$

٣ – برهن أن : $\overline{OP} + \overline{OQ} = \overline{MF} + \overline{MF'}$

٤ – احسب سطح المثلث MFP واستنتج أن بعد P عن MF ثابت .

٢٩٧ – دائرة تقطع قطع زائد في أربع نقط P_1, P_2, P_3, P_4 . P_1M_1 ، P_2M_2 عمودان على أحد الخطين المقاربين ، P_3N_3 ، P_4N_4 عمودان على الخط المقارب الآخر .

برهن أن : $P_1M_1 \cdot P_2M_2 = P_3N_3 \cdot P_4N_4$

الأجوبة

٢٨٦ – $7x + 6y = 40$

٢٨٧ – $2x - 4 = \mp y$

٢٩١ - $(x + y - 1)(2x - 3y - 3) + 4 = 0$

٢٩٢ - $(x - y + 1)(x + y - 4) + 2 = 0$

٢٩٣ - $x - 2y = 0$

٢٩٥ - $x_A = \frac{e\ell}{e + \ell}$ ، $x_{A'} = \frac{e\ell}{e - \ell}$

فصل المركز : $\frac{e^2\ell}{e^2 - \ell}$

بعد الدليل عن المركز o :

$$\frac{\ell(e^2 + 1)}{e^2 - 1}$$

(٢) $e = 2$

الخطان المقاربان :

٢٩٦ - $y = \pm\sqrt{3}\,x \mp \frac{4\ell}{\sqrt{3}}$

$$P\left(\frac{a\cos u}{1 - \sin u}, \frac{a\cos u}{1 - \sin u}\right);\ Q\left(\frac{a\cos u}{1 + \sin u}, \frac{-a\cos u}{1 + \sin u}\right)$$

$$\overline{MP}\left(a\,tg\,u, \frac{a}{\cos u}\right);\ \overline{MQ}\left(-a\,tg\,u, \frac{-a}{\cos u}\right)$$

$$s = \frac{a^2}{2\cos u}\left(\sqrt{2} - \cos u\right)$$

الفصل التاسع

القطع المكافىء

١ – القطع المكافىء هو المحل الهندسي للنقط التي بعدهـا عن نقطـة ثابتة تسمى المحرق يساوي بعدها عن مستقيم ثابت لا يمر بالنقطة الثابتة يسمى الدليل .

٢ – معادلة القطع المكافىء المنسوب لمحوره ولمماسه في الذروة هي :

$$y^2 - 2px = o \qquad (1)$$

نسمي p وسيط القطع ويمثل بعد المحرق عن الدليل .

٣ – إذا اتخذنا محرق القطع قطباً ومحوره محوراً قطبياً فعندئذ تكون معادلة القطع القطبية :

$$r = \frac{p}{1 - \cos \Theta}$$

٤ – كل مستقيم في مستوي القطع يقطعه على الاكثر بنقطتين .

٥ – معادلة المماس الذي ميله m للقطع (1) هي :

$$y = mx + \frac{p}{2m}$$

ومعادلة المماس للقطع من نقطة واقعة عليه $M(x_o, y_o)$ هي :

$$y y_o = p(x + x_o)$$

ومعادلة الناظم من نفس النقطة هي :

$$p (y - y_o) + y_o (x - x_o) = o$$

وميل المماسات المرسومه من نقطة ما $M (x_1 , y_1)$ للقطع المكافىء تعطي بالعـــلاقة .

$$2 x_1 m^2 - 2 y_1 m + p = o$$

٦ – المحل الهندسي لمسقط المحرق على ممـــاسات القطع هو المماس في الذروة والمحل الهندسي لنظير المحرق بالنسبة لمماسات القطع هو الدليل .

تحت المماس يساوي ضعف فاصلة نقطة التماس وتحت الناظم يساوي وسيط القطع .

٧ – القطر المرافق لاستقامة مفروضة m هو مستقيم يوازي محور القطع معادلته :

$$y = \frac{p}{m}$$

ومعادلة القطع المكافىء المنسوب الى أحد مماساته والى القطر المرافق لهـــذا المماس تكون من الشكل :

$$y_2 = 2 p_1 x$$

تمارين ومسائل محلولة

٢٩٨ – برهن أنه إذا تحركت نقطة في المستوي على شكل يكون فيه مربع بعدها عن مستقيم ثابت متناسباً مع بعدها عن مستقيم ثابت آخر لايوازي الأول ، هو عبارة عن قطع مكافىء .

الحـل :

لنتخذ نقطة تقاطع المستقيمين مبدأ للاحـــداثيات والمستقيم الأول محوراً للسينات والعمودي عليه محوراً للعينات فعندئذ تكون معادلة المستقيم الثاني هي :

$$a x + b y + c = o$$

فاذا كانت $M (X , Y)$ نقطة ما من المستوي فعندئذ يكون بعدها عن المستقيم الأول هو Y وبعدها عن المستقيم الثاني هو :

$$\frac{|a X + b Y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاذا كانت ثابتة التناسب k فعندئذ يكون :

$$Y^2 = k \frac{|a X + b Y + c|}{\sqrt{a^2 + b_2}}$$

وحيث أن الطرف الأيسر موجب يلزم ان يكون الطرف الايمن كذلك ، ولهذا يمكننا ان نكتب :

$$\mp Y^2 = \frac{k a}{\sqrt{a^2 + b^2}} X + \frac{k b}{\sqrt{a^2 + b^2}} Y + \frac{k c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

أو :

$$Y^2 = AX + BY + C$$

وإذا سحبنا المحاور إلى النقطة $(\frac{B}{2} , - \frac{B^2 + 4 C}{4 A})$

حصلنا على معادلة من الشكل :

$$Y^2 = A\ X$$

وهي تمثل قطعاً مكافئاً وهو المطلوب .

٢٩٩ – أوجد معادلة القطع المكافىء إذا علمت أن ذروته تقع على المستقيم :

$$2y - 3x = o$$

وان محوره يوازي ox وانه يمر بالنقطة $(1 - , 6)$ ، $(5 , 3)$.

الحـل :

لنفرض أن ذروة القطع في النقطة (x_o , y_o) فعندئذ تكون معادلة القطع ، حيث أن محوره مواز لمحور السينات ، من الشكل :

$$(y - y_o)^2 = 2\ p\ (x - x_o)$$

وبما أن القطع يمر بالنقطتين $(1 - , 6)$ و $(5 , 3)$ ، كما أن ذروته تقع على المستقيم المفروض فإنه يكون :

$$(5 - y_o)^2 = 2\ p\ (3 - x_o)$$

$$(1 + y_o)^2 = 2\ p\ (6 - x_o)$$

$$2\ y_o - 3\ x_o = o$$

وبحل جملة المعادلات هذه نجد الحل :

$$x_o = 2 \quad ; \quad y_o = 3 \quad ; \quad p = 2$$

والقطع المكافىء الموافق هو :

$$(y - 3)^2 = 4\ (x - 2)$$

كما أننا نجد الحل :

$$x_o = \frac{98}{33} \; ; \; y_o = \frac{49}{11} \; ; \; p = \frac{54}{11}$$

والقطع المكافىء الموافق هو :

$$\left(y - \frac{49}{11} \right)^2 = \frac{108}{11} \left(x - \frac{98}{33} \right)$$

٣٠٠ – أوجد معادلة القطع المكافىء إذا علمت أن محرقه يقع في النقطة (١ – ، ٢ –) وأن نقطتي تقاطعه مع وتره المحرقي العمودي على محور القطع هما $A(-2, 2)$ ، $B(-2, -4)$.

الحـل :

سأبرهن قبل كل شيء ان طو الوتر المحرقي العمودي على محور القطع يساوي ضعف وسيط القطع . من أجل ذلك نفرض ان القطـــع منسوب لمحوره وللماس في الذروة فعندئذ تكون معادلته :

$$y^2 = 2\,p\,x$$

ومعادلة الوتر المحرقي : $x = \frac{p}{2}$

وبحل هاتين المعادلتين نجد نقطتي التقاطع :

$$\left(\frac{p}{2} , -p \right) , \left(\frac{p}{2} , p \right)$$

والبعد بين هاتين النقطتين والذي يساوي طول الوتر المحرقي المفروض هو $2\,p$.

وعلى هـذا فان البعد بين النقطتين A و B يساوي ضعف الوسيط .

إذن :

$$2\,p = \sqrt{36} = 6$$

ومنه : $p = 3$

ومن جهة أخرى نرى ان معادلة الوتر المحرقي هي : $x = -2$

وبما ان وسيط القطع $p = 3$ فمعادلة الدليل هي أما :

$$x = -5 \quad \text{أو} \quad x = 1$$

فاذا كتبنا بعد نقطة ما (x, y) عن الدليل يساوي بعدها عن المحرق حصلنا في الحالة الأولى على المعادلة :

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = (x+5)^2$$

أو $y^2 + 2y - 6x - 20 = 0$

وهي معادلة القطع المطلوبة وتمثل حلاً أولاً للمسألة المفروضة.

وفي الحالة الثانية نحصل على المعادلة :

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2$$

أو $y^2 + 2y + 6x + 4 = 0$

وهي معادلة ثانية تمثل حلاً آخر .

٣٠١ — يقطع مستقيم متحول ، قطعاً مكافئاً معلوماً ، في النقطتين P و Q ، ويقطع محوره في B ومماسه في الرأس A . برهن العلاقة :

$$\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AB}^2 \qquad (1)$$

الحل :

لنرمز لمسقطي P و Q على محور القطع بـ P_1 و Q_1 فاذا لاحظنا أن

مسقط A هو ذروة القطع o فعندئــــذ يكون مسقط AP على محور القطع هو oP_1 ومسقط AQ هو oQ_1 ومسقط AB هو oB . وإذا كان α جيب تمام الزاوية التي يصنعها المستقيم المفروض مع محور القطع، فعندئذ يكون :

$$\overline{OP_1} = \alpha\, \overline{AP}\ ;\ \overline{oQ_1} = \alpha\, \overline{AQ}\ ;\ \overline{OB} = \alpha\, \overline{AB}$$

وبالتالي يكفي لبرهان العلاقة (1) أن نبرهن العلاقة :

$$\overline{oQ_1} \cdot \overline{oP_1} = \overline{oB}^2$$

لنفرض أن القطع منسوب لمحوره ومماسه في الذروة فمعادلته :

$$y^2 = 2\, p\, x$$

ولتكن معادلة المستقيم :

$$y = m\, x + h$$

ان فصول نقط تقاطع المستقيم مع القطع هي حلول المعادلة :

$$m^2 x^2 + 2\,(m\,h - p)\,x + h^2 = o$$

ومنه يلاحظ أن :

$$x_1\, x_2 = \frac{h^2}{m^2}$$

ولكن x_1 يساوي $\overline{op_1}$ و x_2 يساوي $\overline{oQ_1}$ إذن :

$$\overline{oP_1} \cdot \overline{oQ_1} = \frac{h^2}{m^2}$$

ونلاحظ من جهة ثانية بسهولة أن فصل النقطــــة B هو $\frac{-h}{m}$ أي

ومنه نجد أن : $\overline{oB}^2 = \frac{h^2}{m_2}$

$$\overline{oP_1} \cdot \overline{oQ_1} = \overline{oB}^2$$

وهو المطلوب .

٣٠٢ – نرسم من محرق قطع مكافىء F مستقماً ميله m ، فيلاقي القطع في النقطتين A و B .

والمطلوب (١) حساب طول الوتر AB . (٢) إثبات أن AB = 4 FM بفرض أن M هي نقطة تماس المماس للقطع الموازي لـ AB .

الحـــل :

(١) لنأخذ محرق القطع قطباً ومحوره محوراً قطبيــاً فعندئـذ تكون معادلة القطع :

$$r = \frac{p}{1 - \cos \Theta}$$

والمستقيم المار بالمحرق والذي ميله m يصنع مع محور القطع زاوية Θ_0 ($tg\ \Theta_0 = m$) ، فالنقطة A توافق الزاوية القطبية Θ_0 والنقطـــة B توافق الزاوية القطبية $\pi + \Theta_0$ ولذلك فإن :

$$\overline{FA} = \frac{p}{1 - \cos \Theta_0} \quad ; \overline{FB} = \frac{p}{1 + \cos \Theta_0}$$

ومنـــه :

$$\overline{AB} = \overline{FA} + \overline{FB} = \frac{2\,p}{\sin^2 \Theta_0} = \frac{2\,p\,(1 + m^2)}{m^2} \qquad (1)$$

(٢) لننسب القطع إلى محوره ومماسه في الذروة فتكون معادلته $y^2 = 2px$ وتكون معادلة مماسه في النقطة $M(x_0, y_0)$ هي $yy_0 = p(x + x_0)$. وبما أن ميل هذا المماس هو m إذن : $y_0 = \frac{p}{m}$ وبالتعويض في معادلة القطع نجد $x_0 = \frac{p}{2m^2}$ وعلى هذا يكون :

$$\overline{FM}^2 = \left(\frac{p}{2m^2} - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{m^2} = \left(\frac{p}{2m^2} + \frac{p}{2}\right)^2$$

ومنه :

$$(2) \qquad \overline{FM} = \frac{p}{2}\left(\frac{m^2+1}{m^2}\right)$$

بمقارنة (1) مع (2) نجد

$$\overline{AB} = 4\,\overline{FM}$$

وهو المطلوب .

٣٠٣ – P و M و Q ثلاث نقط واقعة على قطع مكافىء و $\widehat{PMQ}$ زاوية قائمة . برهن أنه إذا أدرنا هذه الزاوية حول الرأس M فإن المستقيم PQ يمر بنقطة ثابتة I . أوجد المحل الهندسي للنقطة I عندما تتحول النقطة M على القطع .

الحل :

لننسب القطع إلى محوره ومماسه في الذروة فتكون معادلته $y^2 = 2px$ ، ولنفرض أن α و β و γ تراتيب النقط P و M و Q على الترتيب فعندئذ

نجد بالتعويض في معادلة القطع أن فواصل هذه النقط هي $\frac{\alpha^2}{2p}$ و $\frac{\beta^2}{2p}$ و $\frac{\gamma^2}{2p}$ على الترتيب أي :

$$P\left(\frac{\alpha^2}{2p}, \alpha\right); M\left(\frac{\beta^2}{2p}, \beta\right) ; Q\left(\frac{\gamma^2}{2P}, \gamma\right)$$

وبما أن PM و MQ متعامدان فإننا نجد :

$$(\beta+\alpha)(\gamma+\beta) = -4p^2 \qquad (1)$$

وتكون معادلة pQ هي :

$$y-\gamma = \frac{2p}{\gamma+\alpha}\left(x - \frac{\gamma^2}{2p}\right) \qquad (2)$$

وإذا حسبنا قيمة α من (1) وعوضناها في (2) ثم رتبنا المعـــادلة الناتجة حسب قيمة γ فإننا نجد :

$$(y+\beta)\gamma^2 + (4p^2 - 2px + \beta^2)\gamma - (\beta^2+4p^2)y - 2px\beta = o$$

ويمر هذا المستقيم بنقطة ثابتة عندما يكون :

$$y+\beta = o$$
$$4p^2 - 2px + \beta^2 = o$$
$$(\beta^2+4p^2)y + 2px\beta = o$$

والحل المشترك لهذه المعادلات هو النقطة $I\left(\frac{\beta^2}{2p} + 2p, -\beta\right)$:

$$x = \frac{\beta^2}{2p} + 2p \quad ; \quad y = -\beta \qquad (3)$$

فاذا تحولت النقطة M (أي إذا تحولت β) فعندما تكون معادلة I هي (بحذف β من المعادلتين (3)).

$$x = \frac{y^2}{2p} + 2p$$

وهذه معادلة قطع مكافىء .

٣٠٤ – ليكن لدينا قطع مكافىء محرقه F ، وليكن A و B نقطتي تقاطع وتر يمر بالمحرق مع القطع وليكن كذلك Δ_1 الناظم في A للقطع و Δ_2 الناظم في B . و M نقطة تقاطع الناظمين .

برهن :

١ً – أن الناظمين Δ_1 و Δ_2 متعامدان .

٢ً – ان المستقيم الذي يصل A بمنتصف AB يوازي محور القطع .

٣ً – ان المحل الهندسي لـ M عندما يتحول محور القطع هو قطع مكافيء محوره محور القطع الأول .

الحل :

إذا نسبنا القطع إلى محوره والمماس في الذروة كانت معادلته :

$$y^2 = 2px \qquad (1)$$

لنفرض الزاوية التي يصنعها الوتر المار بالمحرق مع محور السينات هي φ فعندئذ تكون معادلته هذا الوتر هي :

$$y = \operatorname{tg}\varphi \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right) \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد نقط التقاطع :

$$x_A = \frac{p}{2} \quad \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \qquad y_A = \frac{p \sin \varphi}{1 - \cos \varphi}$$

$$x_B = \frac{p}{2} \quad \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \qquad y_B = - \frac{p \sin \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

ولما كان ميل الناظم في نقطة ما (x_1, y_1) على القطع هو :

$$m = \frac{-y_1}{p}$$

فان ميل Δ_1 هو :

$$m_1 = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - 1}$$

وميل Δ_2 هو :

$$m_2 = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + 1}$$

وجداء الميلين :

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

وهو المطلوب الأول :

٢ – إن معادلة الناظم Δ_1 هي :

$$Y = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - 1} X + \frac{p}{2} \sin\varphi \frac{3 - \cos \varphi}{(1 - \cos \varphi)^2}$$

ومعادلة الناظم Δ_2 هي :

$$Y = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + 1} X - \frac{p}{2} \sin\varphi \frac{3 + \cos \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2}$$

من هاتين المعادلتين نجد احداثيات النقطة M :

$$X = \frac{p}{2} \frac{3 + \cos_2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \ , \ Y = p \operatorname{ctg} \varphi.$$

وبالاستعانة باحـــداثيات النقط A و B نجـــد احداثيات منتصف القطعة AB :

$$\frac{p}{2} \frac{1 + \cos^2 \varphi}{1 - \cos^2 \varphi} \ , \quad p \operatorname{ctg} \varphi$$

ولما كان ترتيب هذه النقطة يساوي ترتيب النقطة M فان المستقيم الذي يصل بينها يوازي محور السينات الذي هو محور القطع .

٣ً - إذا حذفنا الوسيط من احداثيات النقطة M وجدنا :

$$Y^2 = \frac{p}{2} X - \frac{3 p^2}{4}$$

وهي معادلة قطع مكافىء محوره هو محور السينات وأما ذروتـــه فتقع في النقطة $(o , \frac{3 p}{2})$.

٣٠٥ - لتكن القطوع المكافئة :

$$y^2 + \mu^2 x^2 - 2 \mu x y - 4 b \mu^2 x = o$$

حيث b طول ثابت و μ وسيط متحول .

١ً - برهن أن المحل الهندسي لنقط تمـــاس المماسات الموازية لمحور السينات هو مستقيم مواز لمحور العينات .

٢ً - عين كلًا من محرق القطع ودليله بدلالة الوسيط ثم اوجـد

المحل الهندمي لمرتسمات النقطة $B(b, o)$ على الدليل وذلك عندما يتحول الوسيط .

الحل :

نفرض أن معادلة المماس الموازي لمحور السينات هي $y = h$ فاذا عوضنا في معادلة القطع وجدنا :

$$\mu^2 x^2 - 2\mu (h + 2b\mu) x + h^2 = o \qquad (1)$$

وهي معادلة فصول نقط التقاطع .

وبكتابة شرط التماس وهو ان يكون مميز المعادلة (1) معدوماً نجد :

$$h = -b\mu$$

وأما فاصلة نقطة التماس في الجذر المضاعف لـ (1) أي :

$$x = \frac{1}{\mu}(h + 2b\mu) = b$$

وهذا يعني أن المحل الهندمي لنقط تماس المماسات المفروضة هو المستقيم $x = b$ الموازي لمحور العينات .

٢ – لنكتب معادلة القطع على الشكل (انظر الفصل الثاني) :

$$(y - \mu x + \lambda)^2 = 2\mu(2b\mu - \lambda)x + 2\lambda y + \lambda^2$$

ولنعين λ على شكل يتعامد فيه المستقيمان :

$$y - \mu x + \lambda = o$$

$$2\mu(2b\mu - \lambda)x + 2\lambda y + \lambda^2 = o$$

فنجـد :

$$\lambda = \frac{2\,b\,\mu^3}{1+\mu\ 2}$$

وبالتعويض بـ (2) نجد :

$$\left(y-\mu x+\frac{2\,b\,\mu^3}{1+\mu^2}\right)^2=\frac{4\,b\,\mu^2}{1+\mu^2}\left(x+\mu y+\frac{b\,\mu^4}{1+\mu^2}\right)$$

فمعادلة محور القطع هي :

$$y-\mu x+\frac{2\,b\,\mu^3}{1+\mu^2}=o \qquad (3)$$

ومعادلة المماس في الذروة هي :

$$x+\mu y+\frac{b\,\mu^4}{1+\mu^2}=o \qquad (4)$$

فاذا اتخذنا المستقيم (3) محوراً للسينات و (4) محوراً للعينـــات

فعندئذ تأخذ دساتير نقل المحاور الشكل :

$$\begin{cases} x=\dfrac{b\,\mu^4}{(1+\mu^2)^2}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}X+\dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}Y \\ y=\dfrac{-b\mu^3(2+\mu^2)}{(1+\mu^2)^2}+\dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}X-\dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}Y \end{cases} \qquad (5)$$

بالتعويض في معادلة القطع نجد :

$$Y^2=\frac{4\,b\,\mu^2}{(1+\mu^2)^{\frac{3}{2}}}X$$

من هذه المعادلة نرى ان وسيط القطع يساوي $p = \frac{2\, b\, \mu^2}{(1 + \mu^2)^{\frac{3}{2}}}$

وان معادلة الدليل هي : $X = -\frac{p}{2}$

وبالعودة إلى الاحداثيات القديمة نجد من (5) ان معادلة الدليل هي :

$$x + \mu\, y + b\, \mu^2 = o$$

وأما احداثيات المحرق في الاحداثيات الجديدة فهي :

$$X = \frac{P}{2} \; ; \quad Y = o$$

وفي الاحداثيات القديمة :

$$x = \frac{-b\, \mu^2}{1 + \mu^2} \qquad y = \frac{-b\, \mu^3}{1 + \mu^2}$$

هذا ولما كان ميل الدليل $= -\frac{1}{\mu}$ فان معادلة العمودي النازل من B على الدليل هي :

$$y = \mu\, (x - b)$$

وتقاطعه مع الدليل يعطي $x = o$

فالمحل الهندسي لمرتسمات النقطة B على الدليل هو محور العينات .

مسائل وتمارين غير محلولة

٣٠٦ – اكتب معادلة القطع المكافىء الذي يقع محرقه في النقطة (3 , 1) وذروته في النقطة (3 , 2 –) .

٣٠٧ – لدينا قطعان مكافئان متساويان متحدان في الذروة ومحور الأول عمودي على محور الثاني برهن أن الزاوية التي يصنعها المماس للأول

مع المماس الثاني تحقق العلاقة :

$$\text{tg } V = \frac{3}{4}$$

٣٠٨ – برهن أنه إذا رسمنا من نقطة P مماسان لقطع مكافىء محرقه F وكانت Q و Q′ نقطتي التماس فعندئذ يكون :

$$\overline{F\ P}^2 = F\,Q \cdot F\,Q'$$

٣٠٩ – ارسم من نقطة ثابتة A قاطعاً متحولاً لقطع مكافىء يقطعه في نقطتين H و K .

برهن أن المحل الهندسي لنقطة تقاطع الناظمين المنشأين من H و K على القطع هو قطع مكافىء آخر .

٣١٠ – عين المحل الهندسي لمركز دائرة متحولة تمس دائرة ثابتة ومستقيماً ثابتاً .

٣١١ – ليكن لدينا قطعاً مكافئاً محرقه F . و T نقطة ما على المماس لهذا القطع في النقطة F .

M مسقط T على FP و N مسقط T على الدليل . برهن أن :

$$F\,M = T\,N$$

الاجوبة

٣٠٦ – $y^2 - 6\,y - 12\,x - 15$

٣١٠ – المحل الهندسي هو قطع مكافىء محرقه يقع في مركز الدائرة الثابتة ودليله يوازي المستقيم الثابت ويبعد عنه بمقدار نصف قطر الدائرة الثابتة في الجانب الآخر بالنسبة لمركزها .

الفصل العاشر

منحنيات الدرجة الثانية في المستوي

١ – المعادلة العامة لمنحنيات الدرجة الثانية هي :

$$(1) \qquad A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0$$

شريطة أن لاتنعدم A و B و C بآن واحد ، والا لانقلبت إلى معادلة من الدرجة الأولى ، وعندئذ تمثل (بوجه عام) مستقيماً في المستوي .

٢ – لنرمز بـ :

$$\delta = AC - B^2 \; ; \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \; ; \quad H = \frac{\Delta}{\delta}$$

(١) إذا كان $\delta \neq 0$ و $\Delta = 0$ فالمعادلة (1) تمثل مستقيمين متقاطعين ، حقيقيين اذا كان $\delta < 0$ وتخيليين اذا كان $\delta > 0$.

(٢) إذا كان $\delta < 0$ و $\Delta \neq 0$ فالمعادلة تمثل قطعاً زائداً .

(٣) إذا كان $\delta > 0$ و $\Delta \neq 0$ فالمعادلة تمثل قطعاً ناقصاً ، حقيقياً أو تخيلياً حسبما يكون الجداء $H(A + C)$ سالباً أو موجباً ويكون هذا القطع دائرة عندما $B = 0$ و $A = C$ وهي حقيقية أو تخيلية حسبما يكون $A.H$ سالباً أو موجباً .

(٤) اذا كان $\delta = 0$ وعندئذ إما أن يكون :

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} \neq \frac{D}{E}$$

وعندئذ تمثل المعادلة قطعاً مكافئاً ، او أن يكون :

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E}$$

وعندئذ تمثل المعادلة مستقيمين متوازيين ، تخيليين عندما $F > \frac{D^2}{A}$ ومنطبقين

عندما $F = \frac{D^2}{A}$ ومتوازيين حقيقيين عندما $F < \frac{D^2}{A}$.

٣ – يمكن بعملية نقل ملائمة للمحاور الاحداثية رد المعادلة من الدرجة الثانية إلى أبسط شكل لها (راجع الفصل الثاني) .

٤ – يمكن تعيين نصفي محوري القطع (عندما $\delta . \Delta \neq 0$) بأن نجري انسحاباً إلى مركز التناظر فتأخذ معادلة المنحني الشكل :

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + H = 0$$

ثم نقاطعه مع الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ ونكتب شرط تماس الدائرة مع القطع فعندئذ نجد دائرتين يكون نصفا قطريهما مساويين لنصفي قطري القطع .

٥ – يمكن تعيين المماس في الذروة ومحور القطع المكافىء مباشرة وفق مايلي :

نكتب معادلة القطع بالشكل :

$$(Ax+By + \lambda)^2 = 2 A (\lambda - D) x + 2 (B \lambda - AE) y + \lambda^2 - A F$$

ثم نعين λ بحيث يكون المستقيم :

$$A x + B y + \lambda = 0 \qquad (2)$$

متعامداً مع المستقيم :

$$2 A (\lambda - D) x + 2 (B\lambda - AE) y + \lambda^2 - AF = 0 \qquad (3)$$

ثم نعوض قيمة λ في (2) و (3) فنحصل على معادلة محور القطع ومماسه في الذروة .

مسائل وتمارين محلولة

عين نوع كل من منحنيات الدرجة الثانية التالية :

٣١٢ - $xy + x - 2y + 3 = 0$

الحـل :

نلاحظ أن :

$$A = C = 0 ; \quad B = \frac{1}{2} ; \quad D = \frac{1}{2} ; E = -1 ; \quad F = 3$$

وبالتالي :

$$\delta = -\frac{1}{4} < 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{5}{4} \neq 0$$

فالمعادلة تمثل قطعاً زائداً لأن $\Delta \neq 0$ و $\delta < 0$.

٣١٣ - $41x^2 - 84xy + 76y^2 = 168$

الحـل :

$$A = 41 ; \quad B = -42 ; \quad C = 76 ; \quad D = E = 0 ; \quad F = -168$$

$$\delta = 41 \,.\, 76 - (-42)^2 > 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 41 & -42 & 0 \\ -42 & 76 & 0 \\ 0 & 0 & -168 \end{vmatrix} = -168\,\delta \neq 0$$

فالمعادلة تمثل قطعاً ناقصاً . ان هذا القطع حقيقي لأن :

$$H(A + C) = -168(41 + 76) < 0$$

٣١٤ — $x^2 - 4xy + 4y^2 + x - y + 2 = 0$

الحـل :

$$A = 1, \quad B = -2; \; C = 4 \; ; \; D = \frac{1}{2}, \quad E = -\frac{1}{2} \; ; \; F = 2$$

$$\delta = AC - B^2 = 0$$

فالمعادلة تمثل قطعاً مكافئاً او مستقيمين متوازيين . ولكن :

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} \neq \frac{D}{E}$$

فالمنحني هو قطع مكافىء فعلاً .

٣١٥ — $x^2 - 2xy + y^2 - x + y - 2 = 0$

الحـل :

$$A = C = 1, \; B = -1, \quad D = -\frac{1}{2}, \; E = \frac{1}{2}, \; F = -2$$

$$\delta = AC - B^2 = 0$$

$$\frac{A}{B} = -1, \; \frac{B}{C} = -1, \; \frac{D}{E} = -1$$

أي :

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E}$$

فالمعادلة تمثل مستقمين متوازيين . وبما أن :

$$F < \frac{D^2}{A}$$

فالمستقيمان حقيقيان :

يمكن كتابة المعادلة بالشكل :

$$(x - y - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$$

فالمستقيمان هما :

$$x - y - \frac{1}{2} = \mp \frac{3}{2}$$

٣١٦ - $2 x^2 + 3 x y + 4 y^2 + 2 x - 3 y + 5 = 0$

الحـــل :

$$A = 2 , \; B = 3/2 \; , \; C = 4 , \; D = 1 , \; E = - \frac{3}{2} \; , \; F = 5$$

$$\delta = AC - B^2 = \frac{23}{4} > 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 4 & -3/2 \\ 1 & -3/2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{63}{4}$$

فالمعادلة تمثل قطعاً ناقصاً ولكن هذا القطع تخيلي لأن :

$$H (A + C) = \frac{63}{23} (2 + 4) > 0$$

٣١٧ - بين أن المعادلة :

$$17 x^2 - 12 x y + 8 y^2 - 68 x + 24 y - 12 = 0$$

تمثل قطعاً ناقصاً . احسب نصفي قطريه واوجد معادلتي محوريه التناظريين .

الحـل :

$$A = 17\ ,\ B = -6\ ,\ C = 8\ ,\ D = -34\ ,\ E = 12\ ,\ F = -12$$

$$\delta = AC - B^2 = 100 > 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 17 & -6 & -34 \\ -6 & 8 & 12 \\ -34 & 12 & -12 \end{vmatrix} = -8000 \neq 0$$

$$H(A + C) = -80(25) < 0$$

فالمعادلة تمثل قطعاً ناقصاً حقيقياً .

لحساب نصفي قطري القطع وتعيين معادلتي محوريه نسحب المحاور الاحداثية إلى مركز القطع فتأخذ معادلته الشكل :

$$(1) \qquad 17\,x_1^2 - 12\,x_1\,y_1 + 8\,y_1^2 \quad 80 = 0$$

ثم نقاطعه مع الدائرة :

$$(2) \qquad x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

لنضرب (1) بـ r^2 (2) بـ 80 ثم نطرح فنجد :

$$(3) \qquad (17\,r^2 - 80)\,x_1^2 - 12\,r^2\,x_1\,y_1 + (8\,r^2 - 80)\,y^2 = 0$$

ويكون لهذه المعادلة جذر مضاعف عندما :

$$36\,r^4 - (17\,r^2 - 80)(8\,r^2 - 80) = 0$$

ومنه :

$$r^4 - 20\,r^2 + 64 = (r^2 - 16)(r^2 - 4) = 0$$

ومنـه :

$$r_1^2 = 16 = a^2$$
$$r_2^2 = 4 = b^2$$

فنصفا قطري القطع هما 4 و 2 .

لنعوض r بـ 4 في (3) فنجد :

$$4x_1^2 - 4x_1y_1 + y_1^2 = (2x_1 - y_1)^2 = 0$$

فمعادلة المحور الأول في الجملة الجديدة (الناتجة عن سحب الجملة القديمة إلى مركز القطع) هي :

$$2x_1 - y_1 = 0 \qquad (4)$$

وإذا عوضنا r بـ 2 في (3) فاننا نجد معادلة المحور الثاني هي :

$$x_1 + 2y_1 = 0 \qquad (5)$$

واذا أردنا كتابة معادتي المستقيمين (4 و 5) في الجملة القديمـــة نلاحظ أن مركز القطع يقع في النقطة (0 , 2) (انظر الفصل الثاني)، ولذلك فان دساتير نقل المحاور هي :

$$x = x_1 + 2 \quad , \quad y = y_1$$

بالتعويض في (4) و (5) نجد :

$$2x - y = 4 \quad , \quad x + 2y = 2$$

ملاحظة : يمكن الحصول على المعادلتين (1) و (2) انطلاقاً من (1) بشكل آخر :

إن أمثال توجيه الناظم على القطع (1) في النقطة (x_1 , y_1) هي [نحصل عليها بالاشتقاق الجزئي بالنسبة لـ x_1 و y_1] .

$$34x_1 - 12y_1 \quad , \quad -12x_1 + 16y_1$$

أو (بالاختصار)

$$17\,x_1 - 6\,y_1 \quad ; \quad -6\,x_1 + 8\,y_1$$

واكننا نعلم أن الناظم لا يمر في مركز القطع إلا في ذرى القطع ، ولذلك تتعين هذه الذرى بكتابة شرط توازي الناظم في (x_1 , y_1) مع نصف القطر الشعاعي المتعلق بهذه النقطة :

$$(6) \qquad \begin{cases} 17\,x_1 - 6\,y_1 = \lambda\,x_1 \\ -6\,x_1 + 8\,y_1 = \lambda\,y_1 \end{cases}$$

$$(17 - \lambda)\,x_1 - 6\,y_1 = 0$$

$$-6\,x_1 + (8 - \lambda)\,y_1 = 0$$

كي يكون لهاتين المعادلتين حل غير الحل التافه يلزم ان ينعدم معين الأمثال :

$$\begin{vmatrix} 17 - \lambda & -6 \\ -6 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25\,\lambda + 100 = 0$$

وحلا هذه المعادلة هما $\lambda = 5$ و $\lambda = 20$

فإذا عوضنا القيمة الأولى في احدى معادلتي (6) نجد :

$$2\,x_1 - y_1 = 0$$

وإذا عوضنا القيمة الثانية نجد :

$$x_1 + 2\,y_1 = 0$$

٣١٨ – عين محور القطع المكافىء :

$$x^2 - 4\,x\,y + 4\,y^2 - 4\,x + 38\,y + 49 = 0$$

ومماسه في الذروة .

الحـل :

نكتب معادلة القطع بالشكل :

$$(x - 2y)^2 = 4x - 38y - 49$$

وهذه المعادلة تكتب بالشكل :

$$(x - 2y + \lambda)^2 = (4 + 2\lambda)x + (-38 - 4\lambda)y - 39 + \lambda^2$$

ثم نعين λ بحيث يتعامد المستقيم :

$$x - 2y + \lambda = 0 \qquad (1)$$

مع المستقيم:

$$(4 + 2\lambda)x + (-38 - 4\lambda)y - 49 + \lambda^2 = 0 \qquad (2)$$

فنجد $\lambda = -8$ بالتعويض في (1) و (2) نحصل على الترتيب على معادلة محور القطع ومماسه في الذروة :

$$x - 2y - 8 = 0$$
$$4x + 2y - 5 = 0$$

٣١٩ – بين أن المعادلة :

$$-5x^2 + 11xy - 2y^2 - 6x + 3y - 1 = 0$$

تمثل مستقيمين متقاطعين . أوجد معادلتيها

الحـل :

إن : $\Delta = 0 \quad ; \quad \delta \mp 0$

فالمعادلة تمثل مستقيمين متقاطعين . يلاحظ أنه يمكن كتابة المعادلة بالشكل:

$$(5x - y + 1)(-x + 2y - 1) = 0$$

فالمستقيمان هما : $x - 2y + 1 = 0 \quad ; \quad 5x - y + 1 = 0$

٣٢٠ – ناقش نوع القطع المعرف بالمعادلة :

$$\lambda x^2 - 2xy + \lambda y^2 - 2(\lambda + 1)x + 2y + 2 = 0$$

حسب القيم الوسيط λ .

الحـل :

إن :

$$\delta = \lambda^2 - 1 \; ; \; \Delta = -\lambda^3 \quad , \quad H = \frac{\lambda^3}{1 - \lambda^2}$$

الحالة الأولى : $\lambda^2 - 1 \neq 0$ وهنا نميز حالتين : (١) $\lambda = 0$ وعندئذ تمثل المعادلة مستقيمين متقاطعين :

$$-2xy - 2x + 2y + 2 = -2(x - 1)(y + 1) = 0$$

فيها : $x = 1 \quad , \quad y = -1$

(٢) $\lambda \neq 0$ والمعادلة تمثل قطعاً زائداً أو ناقصاً حسب اشارة δ .

فإذا كان $\lambda^2 - 1 < 0$ أي $-1 < \lambda < 1$ فالمعادلة تمثل قطعاً زائداً ، أما إذا كان $\lambda > 1$ أو $\lambda < -1$ فالمعادلة تمثل قطعاً ناقصاً ، وهذا القطع حقيقي لأن :

$$H(A + C) = \frac{-2\lambda^4}{\lambda^2 - 1} < 0$$

الحالة الثانية : $\lambda^2 - 1 = 0$ أي $\lambda = \mp 1$ وفي هاتين الحالتين يكون $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} \neq \frac{D}{E}$ والمعادلة تمثل قطعاً مكافئاً .

٣٢١ – ناقش حسب وضع النقطة $M(\alpha , \beta)$ نوع القطع :

$$\alpha x^2 + 2\beta xy - (\alpha - 2)y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$$

الحـل :

إن :

$$\delta = 2\alpha - \alpha^2 - \beta^2 \quad ; \qquad \Delta = -2(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - \beta + 1)$$

ويكون $\delta = 0$ على محيط الدائرة C_1 :

$$(\alpha - 1)^2 + \beta^2 = 1$$

التي مركزها $(1 , 0)$ ونصف قطرها 1 . ويكون $\delta > 0$ داخل هذه الدائرة و $\delta < 0$ خارجها ويكون $\Delta = 0$ على محيط الدائرة C_2 :

$$(\alpha - 1)^2 + (\beta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

التي مركزها $(\frac{1}{2} , 1)$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$. وتقع C_2 داخل C_1 وتمسها في النقطة $(1 , 1)$ I . ويكون $\Delta < 0$ داخل الدائرة C_2 و $\Delta > 0$ خارجهـــا .

من هذا نستنتج ما يلي :

(١) النقطة M خـارج C_1 فعندئـــذ يكون $\delta < 0$ و $\Delta \neq 0$ والقطع زائد .

(٢) النقطة M داخل C_2 فعندئذ يكون $\delta > 0$ و $\Delta \neq 0$ والقطع ناقص وحيث أنه يكون هناك $H(A + C) = \frac{\Delta}{\delta}(A + C) < 0$ فالقطع حقيقي .

(٣) النقطة M داخل الحلقة بين C_1 و C_2 فعندئذ يكون $\delta > 0$ و $\Delta \neq 0$ و $H(A + C) > 0$ والمعادلة تمثل قطعاً ناقصاً وهمياً .

(٤) النقطة M على محيط C_1 (دون النقطة I) فعندئذ يكون $\Delta = 0$ و $\delta \neq 0$ والمعادلة تمثل مستقيمين متقاطعين تخيليين لأن $\delta > 0$.

(٥) النقطة M على محيط C_1 فعندئذ يكون $\delta = 0$ فإذا كان $\alpha \neq 1$ فعندئذ يكون $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} \neq \frac{D}{E}$ والمعادلة تمثل قطعاً مكافئاً اما إذا كان $\alpha = 1$ وبالتالي $\beta = \mp 1$ فالمعادلة تمثل مستقيمين متوازيين وبما أنه يكون هناك $\frac{D^2}{A} > F$ فالمستقيمان تخيليان .

٣٢٢ – اكتب معادلة المماس للقطع :

$$3y^2 - 10xy - 8x^2 - 9y + 6x + 5 = 0 \qquad (1)$$

الموازي للمستقيم . $y = 2x + 1$

الحــل :

ان معادلة المماس من الشكل $y = 2x + h$. نعوض في (1) ونرتب وفق قوى x فنجد :

$$-16x^2 + 2(h-6)x + 3h^2 - 9h + 5 = 0$$

لنكتب شرط التماس وهو أن يكون مميز هذه المعادلة معدوماً فنجد قيمتين لـ h همـا 2 و $\frac{58}{49}$ فللمسألة حلان .

$$y = 2x + 2 \quad , \quad y = 2x + \frac{58}{49}$$

٣٢٣ – أوجد معادلة القطر المرافق لاستقامة محور السينات في القطع :

$$5y^2 - 3yx + 2x^2 - y + x - 4 = 0$$

الحـل :

ان معادلة المستقيمات الموازية لمحور السينات هي :

$$y = h \qquad (1)$$

وان فصول نقط تقاطع القطع مع هذه المستقيمات تعطى بالمعادلة :

$$2x^2 + (1 - 3h)x + 5h^2 - h - 4 = 0$$

ويكون فصل منتصف الوتر الواصل بين نقطتي التقاطع .

$$x = \frac{x_2 + x_2}{2} = \frac{3h - 1}{4} \qquad (2)$$

بحذف h بين (1) و (2) نجد المعادلة المطلوبة .

$$3y - 4x - 1 = 0$$

٣٢٤ – عين المستقيمين المقاربين للقطع الزائد :

$$3y^2 - 5xy - 2x^2 - 2y - 4x + 2 = 0$$

الحـل :

نقسم على x^2 ثم نجعل $x \to \infty$ فعندئذ $m \to \frac{y}{x}$ ونحصل :

$$3m^2 - 5m - 2 = 0$$

ومنه $m = 2$ و $m = -\frac{1}{3}$ وهذه هي المناحي المقاربة .

ثم نعين مركز القطع بحل المعادلتين :

$$-4x - 5y - 4 = 0$$

$$-5x + 6y - 2 = 0$$

فنجد $\left(\frac{-12}{49} , \frac{34}{49}\right)$ C . وتكون معادلة الخط المقارب الأول (ميله 2 ويمر بـ C) :

$$y - 2x - \frac{8}{7} = 0$$

ومعادلة الخط المقارب الثاني :

$$3y + x + \frac{10}{7} = 0$$

مسائل وتمارين غير محلولة

عين نوع كل من منحنيات الدرجة الثانية التالية :

٣٢٥ – $3x^2 - 6xy + 2y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

٣٢٦ – $6x^2 + 4xy + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$

٣٢٧ – $4x^2 + 6xy + y^2 - 10x - 10 = 0$

٣٢٨ – $2x^2 + xy - 6y^2 - 3x + 8y - 2 = 0$

٣٢٩ – $9x^2 - 6xy + y^2 - 3x + y - 2 = 0$

٣٣٠ – $9x^2 - 6xy + y^2 - 4x + y - 2 = 0$

٣٣١ – $5x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$

٣٣٢ – $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y = 0$

٣٣٣ – $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$

احسب نصفي قطري القطعين التاليين :

٣٣٤ – $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$

٣٣٥ – $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$

٣٣٦ – عين محور القطع المكافىء

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 7x + 4y - 8 = 0$$

ومماسه في الذروة .

٣٣٧ – ناقش نوع القطع المعرف بالمعادلة التالية وذلك حسب قيم الوسيط λ :

$$x^2 + 2\lambda xy + (\lambda + 2)y^2 - 2x - 2\lambda y - 3 = 0$$

٣٣٨ – ناقش حسب وضع النقطة $M(\alpha, \beta)$ نوع القطع :

$$x^2 - 2\alpha xy + y^2 - 2\beta x + 1 = 0$$

٣٣٩ – تقع النقطة $(3, 2)$ على القطع :

$$3y^2 + xy - 2x^2 - 27y + 8x + 30 = 0$$

والمطلوب كتابة معادلة مماس القطع في هذه النقطة .

٣٤٠ – أوجد معادلة القطر المرافق للاستقامة التي ميلها 5 وذلك من أجل للقطع :

$$3y^2 - 4xy + 3y + x - 1 = 0$$

٣٤١ – اكتب معادلتي محوري القطع :

$$y^2 - 3xy + 5y^2 + 2y - 3x - 5 = 0$$

٣٤٢ – عين محرق ودليل القطع المكافىء :

$$(x - y)^2 + 2x - 2y - 1 = 0$$

الاجوبة

٣٢٥ – قطع زائد ٣٢٦ – قطع ناقص ٣٢٧ – قطع زائد

٣٢٨ – مستقيمان متقاطعان حقيقيان ٣٢٩ – مستقيمان متوازيان حقيقيان

٣٣٠ – قطع مكافىء .

٣٣١ – قطع ناقص تخيلي ٣٣٢ – مستقيمان متوازيان تخيليان

٣٣٣ – مستقيمان منطبقان .

٣٣٤ – $(3, 2)$ ٣٣٥ – $(4, 2)$

٣٣٦ – $x - 2y + 3 = 0$ ، $2x + y - 1 = 0$

٣٣٧ – المعادلة تمثل قطعاً زائداً عندما $\lambda > 2$ أو عندما $\lambda < -1$ وتمثل قطعاً ناقصاً عندما $-1 < \lambda < 2$ ، وتمثل مستقيمين متوازيين عندما $\lambda = 2$ أو عندما $\lambda = -1$.

٣٣٨ – المعادلة تمثل قطعاً زائداً عندما $\alpha > 1$ وعندما $\alpha < -1$ وتمثل قطعاً ناقصاً ضمن الشريط $-1 < \alpha < 1$ ، حقيقياً خارج الدائرة $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ووهمياً داخل هذه الدائرة .

وأما على محيط الدائرة $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ باستثناء النقطتين ($\beta = 0$ و $\alpha = \pm 1$) فتمثل المعادلة مستقيمين متقاطعين .

وعلى المستقيمين $\alpha = \mp 1$ فان المعادلة تمثل قطعاً مكافئاً باستثناء الحالة عندما $\beta = 0$ فتمثل مستقيمين متوازيين تخيليين .

٣٣٩ – $6y + x - 12 = 0$

٣٤٠ – $13y - 10x + 8 = 0$

٣٤١ – $3y + x + 3 = 0$ ، $y - 3x + 1 = 0$

٣٤٢ – $x + y - 3 = 0$ ، $(1, 2)$

الفصل الحادي عشر

سطوح الدرجة الثانية

١ – يمكن بوساطة دوران وانسحاب ملائمين رد كل معادلة من الدرجة الثانية في x و y و z إلى شكل بسيط نعرف منه نوع السطح الذي تمثله المعادلة .

٢ – إن المعادلة :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

تمثل مجسم قطع ناقص ، واذا كانت اشارة أحد الحدود في الطرف الأيسر سالبة فعندئذ تمثل المعادلة مجسم قطع زائد وحيد الفرع وان كانت اشارتا حدين سالبة فالمعادلة تمثل مجسم قطع زائد بفرعين .

وإن المعادلة :

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2\,z$$

تمثل مجسم قطع مكافىء ناقص اذا كانت اشارتا الحدين في الطرف الأيسر من نوع واحد ، وتمثل مجسم قطع مكافىء زائد ان كانت الاشارتان من نوعين مختلفين .

مسائل وتمارين محلولة

٣٤٣ – برهن أن المحل الهندسي للنقط التي مجموع مربعي بعديها عن المستقيمين :

$$\begin{cases} y = x \operatorname{tg} \Theta \\ z = c \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x \operatorname{tg} \Theta \\ z = c \end{cases}$$

يساوي كمية ثابتة هو مجسم قطع ناقص . احسب انصاف محاور هذا المجسم .

ليكن $M(x, y, z)$ نقطة من المحل المندمي وليكن d و d' بعدي M عن المستقيم المفروض ، فاذا لاحظنا أن كلًا من المستقيمين المفروضين يعطى بمستويين متعامدين فعندئذ نجد :

$$d^2 = (z - c)^2 + (y - x \operatorname{tg} \Theta)^2 \cos^2 \Theta$$
$$d'^2 = (z - c)^2 + (y + x \operatorname{tg} \Theta)^2 \cos^2 \Theta$$

فاذا وضعنا $d^2 + d'^2 = 2a^2$ (a ثابت) فان المعادلة المطلوبة هي :

$$x^2 \operatorname{tg}^2 \Theta + y^2 \cos^2 \Theta + (z - c)^2 = a^2$$

فأنصاف أقطار الجسم هي ($a \operatorname{ctg} \Theta$ ، $a/\cos \Theta$ ، a) .

٣٤٤ – تمثل المعادلة التالية :

$$\frac{x^2}{a^2 - t} + \frac{y^2}{b^2 - t} + \frac{z^2}{c^2 - t} = 1 \quad (a > b > c)$$

عندما يتحول الوسيط t ، مجموعة سطوح من الدرجة الثانية . برهن أنه يمر في كل نقطة من الفراغ ثلاثة سطوح من المجموعة . ثم برهن أن هذه السطوح هي مجسم قطع ناقص ومجسم قطع زائد وحيد الفرع ومجسم قطع زائد ذو فرعين .

الحـل :

لنرتب المعادلة وفق قيم t فنجد :

$$f(t) \equiv (a^2 - t)(b^2 - t)(c^2 - t) - (b^2 - t)(c^2 - t)x^2 - \ldots = 0$$

وبما أنها معادلة من الدرجة الثالثة في t ففي كل نقطة من الفراغ تمر ثلاثة سطوح من المجموعة توافق الحلول الثلاثة لهذه المعادلة . ولكن إذا أمعنا النظر في الجدول :

t	$-\infty$	c^2	b^2	a^2	$+\infty$
$f(t)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$

فإننا نلاحظ أن $f(t)$ تنعدم من أجل ثلاث قيم حقيقية لـ t ، الاولى أصغر من c^2 (وهذه تعطي مجسم قطع ناقص) والثانية محصورة بين c^2 و b^2 (وهذه تعطي مجسم قطع زائد وحيد الفرع) والثالثة محصورة بين b^2 و c^2 (وهذه تعطي مجسم قطع زائد بفرعين) .

٣٤٥ – أوجد المحل الهندسي للنقط التي تقع على مجسم قطع زائد وحيد الفرع والتي يمر منها مولدان متعامدان .

الحـل :

لنفرض أن معادلة الجسم هي :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 1$$

وهذه تكتب بالشكل :

$$\frac{\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{1+\frac{x}{a}}=\frac{1-\frac{x}{a}}{\frac{y}{b}-\frac{z}{c}}=\lambda \qquad (1)$$

أو بالشكل :

$$\frac{\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{1-\frac{x}{a}}=\frac{1+\frac{x}{a}}{\frac{y}{b}-\frac{z}{c}}=\mu \qquad (2)$$

والمعادلات (1) تمثل حزمة مستقيمات الأمثال الموجهة لكل منها $[\ 2\lambda a, b(\lambda^2-1), c(\lambda^2+1$ وتمثل المعادلات (2) حزمة مستقيمات الأمثال الموجهة لكل منها $[2\mu a, b(1\ \ \mu^2), -c(1+\mu^2)]$ فشرط التعامد هو $\lambda\mu = \frac{a^2}{c^2}$ ولكننا نجد بحل (1) و (2) أن :

$$x = a\ \frac{\mu-\lambda}{\mu\ +}\ ;\ y = b\ \frac{\mu\ \lambda+1}{\mu+\lambda}\ ;\ z = c\,\lambda\ \frac{\mu\,\lambda-1}{\mu+\lambda}$$

وبالاعتماد على شرط التعامد نجد المنحني المطلوب :

$$x = a\ \frac{a^2-c^2\lambda^2}{a^2+c^2\lambda^2}\ ;\ y = b\,\lambda\ \frac{a^2+c^2}{a^2+c^2\lambda^2}\ ;\ z = c\,\lambda\ \frac{a^2-c^2}{a^2+c^2\lambda^2}$$

ونحصل على هذا المنحني من تقاطع الجسم المفروض مع المستوي :

$$z/y = c\,(a^2 - c^2)\,/\,b\,(a^2 + c^2)$$

٣٤٦ – بين بأن الجسم المعين بالمعادلة :

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz + 2x + 2 = 0$$

هو مجسم قطع ناقص .

الحل :

إذا قطعنا هذا الجسم بمستوي $z = c$ فاننا نحصل على معادلة من الدرجه الثانية في x و y هي :

$$x^2 + 2y^2 - 2xy + 2(1 + c)x + 2 + 3c^2 = 0$$

وبما أن $AC - B^2 = 1 > 0$ فالمعادلة تمثل بوجه عام قطعاً ناقصاً . ونحصل على الأمر نفسه إذا قطعنا الجسم بالمستوي $x = c$ أو بالمستوي $y = c$ فالجسم هو مجسم قطع ناقص وهو المطلوب .

مسائل وتمارين غير محلولة

٣٤٧ – أوجد معادلة مجسم القطع المكافىء الناقص الذي تقع ذروته في o ومحوره oz ويمر بالنقطتين $(3, o, 1)$ و $(3, 2, 2)$

٣٤٨ – تتحرك نقطـــة بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين $(o, 3, o)$ و $(o, -3, o)$ يساوي 8 ، فماهو المحل الهندسي لهذه النقطة .

٣٤٩ – ما هو المحل الهندسي للنقط التي مربع بعدها عن المحور oz يساوي ضعف بعدها عن المستوي xoy .

الأجوبة

٣٤٧ – $4x^2 + 9y^2 = 36z$

٣٤٨ – $16x^2 + 7y^2 + 16z^2 = 112$

٣٤٩ – $x^2 + y^2 - 2z = o$

مسائل عامة

٣٥٠ — O نقطة ثابتة و D مستقيم ثابت . M_1 و M_2 نقطتان متحولتان على D بحيث يكون قياس $\widehat{M_1 o M_2}$ ثابتاً ومساوياً إلى α .

(١) أوجد المحل الهندسي لـ ω مركز الدائرة (c) المرسومة على المثلث $OM_1 M_2$.

(٢) لتكن الدائرة (C_1) المارة من النقطتين O و M_1 والتي يقع مركزها ω_1 على OM_1 والدائرة (C_2) المارة من النقطتين O و M_1 والتي يقع مركزها ω_2 على $O M_2$ برهن أن كلاً من الدائرتين (C_1) و(C_2) تمر بنقطة ثابتة غير النقطة O .

(٣) أوجد المحل الهندسي لنقطة تقاطع (C_1) و (C_2) .

(٤) أوجد المحل الهندسي لمراكز الدوائر المرسومة على كل من المثلثين $o\,\omega\omega_1$ ، $o\,\omega\omega_2$.

٣٥١ — ليكن القطع المكافىء $y^2 - 2px = o$ وليكن $A(a , o)$ نقطة من محور القطع . ننشيء من هذه النقطة مستقيماً متحولاً يقطع القطع في P و Q . ولنعتبر الدائرة المارة من هاتين النقطتين ومن ذروة القطع . أوجد :

(١) المحل الهندسي لمركز الدائرة . (٢) المحل الهندسي لنقطة تقاطع القواطع المشتركة بين الدائرة والقطع .

(٣) المحل الهندسي لمسقط نقطة التقاطع الرابعة ، بين الدائرة والقطع ، على الوتر pQ .

٣٥٢ — A_1 و A_2 A_3 ثلاث نقط من قطع ناقص محرقه F ، عين عناصر

هذا القطع إذا علمت أن :

$$\overline{FA_1} = 2\,\overline{FA_2} = 4\,\overline{FA_1} = 8$$

وأن : $\widehat{FA_1, FA_2} = \frac{\pi}{2}$; $\widehat{FA_1, FA_2} = \pi$

٣٥٣ – لدينا المستقيم المتحول D يقطع المحاور الاحداثية ox و oy في النقطتين A و B على شكل يكون فيه $\overline{oA} = \overline{oB} = a$.

(١) برهن أن المحل الهندسي لنقطة M تتحول على شكل يكون فيه مجموع مربعات ابعادها عن اضلاع المثلث BAO يساوي $\frac{a^2}{2}$ هو قطع ناقص . (٢) اختزل معادلة القطع ثم ارسمه .

٣٥٤ – A_1 و A_2 نقطتان مع قطع مكافىء محرقه F . عين وسيط القطع إذا علمت أن :

$$\overline{FA} = 3\,\overline{FA_1} = 6 \quad ; \quad \widehat{FA_1, FA_2} = \pi$$

٣٥٥ – ليكن القطع الناقص $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ والمستقيم Δ الذي معادلته $y = m x + n$. يقطع هذا المستقيم القطع المفروض في النقطتين A و B.

(١) اكتب معادلة الدائرة التي تقبل AB قطراً لها . (٢) تقطع هذه الدائرة القطع في نقطتين أخريتين C و D أوجد عندما يتحول Δ موازياً لنفسه المحل الهندسي لـ M و نقطة تقاطع AB مع CD ، والمحل الهندسي لـ P نقطة تقـــاطع AC مع BD والمحل الهندسي لـ Q نقطة تقاطع AD مع BC .

٣٥٦ – (c) دائرة معادلتها : $x^2 + y^2 = 2x + 1$

(١) يطلب كتابة معادلة القطوع (A) التي تمس هذه الدائرة مرتين بحيث يمر الوتر المار من نقطتي التقاطع من مبـدأ الاحداثيات . يفرض

فوق ذلك أن هذه القطوع تمس المستقيم (D) الذي معادلته :

$$y = x\sqrt{3} + \sqrt{3}$$

(٢) يمر بصورة عامة من النقطة الكيفية (α , β) M قطعان من المجموعة (A) نرمز لهما بـ (A′) و (A″) أين تقع النقطة M ليكون هذان القطعان حقيقيين ؟

(٣) يتقاطع القطعان (A′) و (A″) المشتركان في النقطة M في ثلاث نقاط أخرى نرمز لها بـ M_1 و M_2 و M_3 . يطلب حساب احداثيات هذه النقط بدلالة (α , β) واحداثيي النقطة M .

(٤) اكتب معادلة القطع الزائد المتساوي الساقين (H) الذي يمر من النقاط الأربعة (M , M_1 , M_2 , M_3) وبرهن أن هذا القطع يمر بأربع نقاط ثابتة عندما تتحول النقطة M .

٣٥٧ — ليكن القطع المكافىء $y^2 = 2x$ والنقطة الثابتة (a , o) F ولنفرض مستقيما ميله $\frac{1}{m}$ يمر من F ويقطع القطع المكافىء في النقطتين M_1 و M_2 المتحولتين بتحول القاطع . اكتب معادلة الدائرة التي قطرها M_1 و M_2 وبرهن أن هذه الدائرة متعامدة مع دائرة ثابتة .

٣٥٨ — برهن أن المستقيمين :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + 3y + 3z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 + z \\ y = -1 - 3x \end{cases}$$

متقاطعان . عين احداثيات نقطة التقاطع . اكتب معادلة المستوي P المعين بهذين المستقيمين احسب مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ على المحاور الاحداثية حيث ($2 , 5 , o$) A و B مرتسم A على المستوي (P) .

الاجوبة

٣٥٠ — (١) قطع زائد محرقه o ودليله D وتباعده المركزي $\frac{1}{\cos \alpha}$

(٣) دائرة مركزها o ·　(٤) قطعان زائدان محرقهما المشترك o وتباعدهما المركزي $\frac{1}{\cos\alpha}$.

٣٥١ – (١) $y^2 = \frac{a^2}{4p}\left(x - p - \frac{a}{2}\right)$

(٢) $2x = a$ ، $a^2 y^2 = 2px^2(2x + a)$

(٣) $y^4 + y^2(x - a)(x + 2p) = 2p(x - a)^2$

٣٥٢ – $a = \frac{16}{3}$; $b = \frac{16\sqrt{15}}{15}$

٣٥٣ – $8x^2 + 4y^2 = a^2$

٣٥٤ – $p = 3$

٣٥٥ – (1) $(a^2 m^2 + b^2)(x^2 + y^2) + 2a^2 m n x - 2b^2 n y$
$+ (a^2 + b^2) n^2 - a^2 b^2 (1 + m^2) = o$

(٢) المحل الهندسي لـ M : $b^2 m x - a^2 y = o$

« « : Q , P

$(a^2 m^2 + b^2) x y (x + m y) = m (b^4 x + a^4 m y)$

٣٥٦ – (١) $(x^2 + y^2 - 2x - 1)(m^2 + 3) = 2(y - m x)^2$

(٢) $(x^2+y^2-2x-1)(x\sqrt{3}+\sqrt{3}-y)(x\sqrt{3}+\sqrt{3}+y) > o$

(٣) تقع M_1 على oM وفصلها $\alpha / 2\alpha + 1$ وأما M_2 و M_3 فتقعان على المستقيم $3\alpha x + \beta y = o$ ويحقق فصلها المعادلة :

$(6\alpha^2 + 2\beta^2 - 6\alpha - 3) x^2 - 2\beta^2 x - \beta^2 = o$

(٤) $\alpha\beta(y^2 - x^2 - 2x - 1) = x y (\beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha - 1)$

٣٥٧ – $(x - a - m^2)^2 + (y - m)^2 = (1 + m^2)(2a + m^2)$

$x^2 + y^2 = a^2 - 2a$

٣٥٨ – $(-2, 5, -4)$ ؛ $2x + y + z + 3 = o$ ؛ $(-4, -2, -2)$

أبحاث الكتاب